

Die Verfahren von HARE/NIEMEYER und von SAINTE-LAGUË/SCHEPERS vergleichen

Jede Gruppe schaut sich beide Sitzverteilungsverfahren in Hinblick auf ein bestimmtes mathematisches Kriterium an. Die Leitfrage lautet:

Wie bewertet ihr die beiden Verfahren in Hinblick auf eure Untersuchung?

Jede Gruppe erhält individuelle Fragen zu ihrem Thema, die bei der Beantwortung der Leitfragen helfen können.

Bereitet euch darauf vor, den anderen Gruppen eure wichtigsten Erkenntnisse vorzustellen!

Zur Erinnerung: Abkürzungen

M	Anzahl der zu verteilenden Mandate (Sitze) / Parlamentsgröße
n	Anzahl der zu berücksichtigenden Parteien
s_i	Anzahl der gültigen Stimmen für Partei $i, i \in \{1, \dots, n\}$
$S = \sum_{i=1}^n s_i$	Gesamtanzahl an gültigen Stimmen
m_i	Anzahl der Mandate für Partei $i, i \in \{1, \dots, n\}$, es gilt: $\sum_{i=1}^n m_i = M$

Zur Erinnerung: Das Verfahren von HARE/NIEMEYER

$$q_i = s_i \cdot \frac{M}{S} \stackrel{!}{=} \lfloor q_i \rfloor + r_i$$

1. Jede Partei i erhält zunächst $\lfloor q_i \rfloor$ Sitze (abgerundete Quote).
2. Es wird die Anzahl der unverteilter Restsitze bestimmt: $r = M - \sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor$
3. Die r Parteien mit den größten Resten r_i erhalten einen weiteren Sitz.

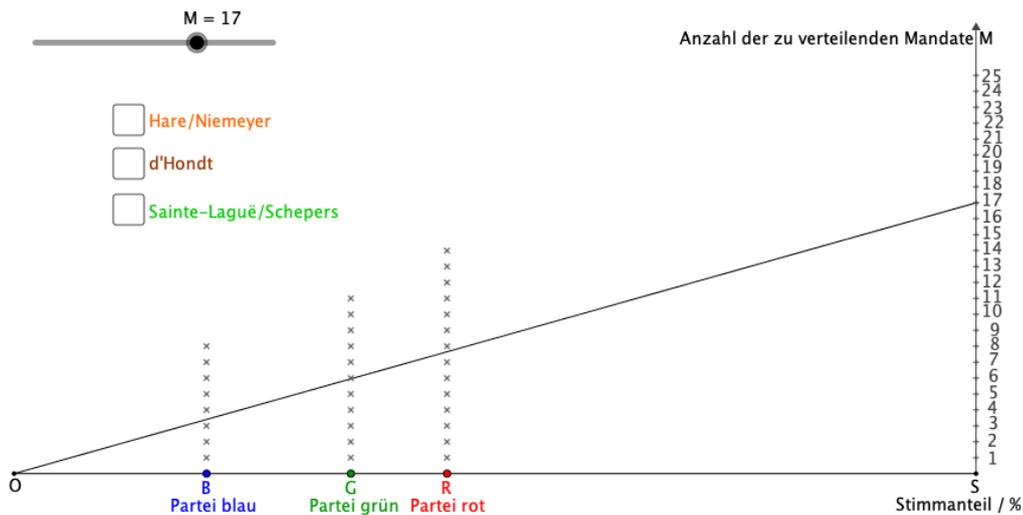
Zur Erinnerung: Das Verfahren von SAINTE-LAGUË/SCHEPERS

Die Stimmzahlen werden durch $0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; \dots$ dividiert, jede der M größten Zahlen entspricht einem Mandat für die entsprechende Partei.

oder Man dividiert alle Stimmzahlen durch einen Anfangsdivisor und rundet kaufmännisch. Wenn die Summe der Ergebnisse kleiner als M ist, wird der Divisor verkleinert (ist die Summe größer, wird der Divisor erhöht), bis die Summe genau gleich M ist.

Strahlensatz

Die Strahlensatz-Figur ist eine geometrische Veranschaulichung von Proportionalität. Schaut euch deshalb die GEOGEBRA-DATEI „Strahlensatz.ggb“ an.



- Eine Partei erhält so viele ganze Sitze, wie unterhalb der Hypotenuse liegen. Warum ist die Summe dieser Kreuze oft kleiner als M ?
Tipp: Vor allem für kleine M lässt sich die Abweichung besonders gut beobachten.
- Welche geometrische Transformation steckt hinter der Verteilung der Restsitze bei den einzelnen Verfahren? Welche Idee bzw. welche Auswirkung wird durch diese geometrische Veränderung beschrieben?
- Welcher Zusammenhang und welcher Unterschied besteht zwischen dem Verfahren von D'HONDT und dem von SAINTE-LAGUË/SCHEPERS?
Tipp: Die Sitzzahlen kaufmännisch zu runden, bedeutet, den ersten Sitz schon bei 0,5 zu verteilen.
- Welche Aussagen und Interpretationen sind mithilfe des Strahlensatzes in der GEOGEBRA-Datei möglich?

Erklärung

- Auf der horizontalen Achse sind die Parteien aufgetragen. Der Abstand einer Partei zum Scheitel des Winkels O entspricht bezogen auf die Gesamtstrecke \overline{OS} genau dem prozentualen Stimmenanteil.
- Die variierbare Parlamentsgröße $M \in \{1, \dots, 25\}$ findet sich auf der horizontalen Kathete wieder.
- Über die Kontrollkästchen lassen sich die verschiedenen Sitzverteilungsverfahren – HARE/NIEMEYER, D'HONDT (hier als zusätzlicher Vergleich) und SAINTE-LAGUË/SCHEPERS – auswählen. Über einen weiteren Schieberegler (neutrale Position ganz links) lässt sich dann die Strahlensatzfigur entsprechend des gewählten Verfahrens geometrisch transformieren.

Mögliche Antworten: Strahlensatz

- a) Die Kreuze entsprechen den ganzzahligen Sitzen, die im proportionalen Anspruch enthalten sind: $\lfloor q_i \rfloor$.
Durch Abrundung ist die Summe oft kleiner als M . Es gilt $\sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor \leq M$.
- b) HARE/NIEMEYER: Parallelverschiebung der Hypotenuse, Auflösung der Strahlensatzfigur (bzw. Verlängerung der Kathete, die S darstellt, wodurch das Verhältnis der Parteien untereinander nicht erhalten bleibt). Das Kreuz, das als nächstes hinzugenommen wird, hat dabei stets folgende Eigenschaft: Fällt man das Lot durch diesen Punkt auf die horizontale Kathete, so ist der Abstand zwischen ihm und dem Schnittpunkt von Lot und ursprünglicher Hypotenuse, geringer als bei jedem anderen Punkt.
D'HONDT: Drehung der Hypotenuse im mathematischen Sinn um O sowie entsprechende Verlängerung der Hypotenuse bis zur vertikalen Kathete. Die Strahlensatzfigur bleibt erhalten, auf der vertikalen Kathete wird für die Sitzanzahl nur eine Zahl ausgewählt, die größer ist als M ist und sogar aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sein kann. Es werden so viele Sitze verteilt, bis die Summe der ganzzahligen Ansprüche M ergibt. Die Drehung sieht zunächst nach einer Bevorzugung der größeren Parteien aus, dabei gilt der neue Proportionalitätsfaktor für alle Parteien. Deren Verhältnis bleibt zueinander identisch erhalten, weil die horizontale Kathete nicht verändert wird (im Unterschied zu HARE/NIEMEYER).
SAINTE-LAGUË/SCHEPERS: Die ganze Strahlensatzfigur wird um $0,5$ in vertikaler Richtung nach oben verschickt, damit der x -te Sitz kaufmännisch schon bei $x - 0,5$ erreicht wird (dadurch können theoretisch mehr als M Kreuze im Dreieck liegen). Danach wird wie bei D'HONDT gedreht, um die letzten Mandate zu verteilen.
- c) siehe vorherige Aufgabe
SAINTE-LAGUË/SCHEPERS funktioniert wie D'HONDT, nachdem die Strahlensatzfigur einmal um $0,5$ verschoben worden ist.
- d) Bei HARE/NIEMEYER wird bei den Restsitzen von der Proportionalität abgewichen.
Die gleichmäßige absolute Anhebung bei HARE/NIEMEYER sieht zunächst gerechter als die Drehung aus, die die Proportionalität erhält, weil dort die Hypotenuse über den größeren Parteien schneller angehoben wird.
Divisorverfahren haben offensichtlich die Drehung gemeinsam, nur die Ausgangsbasis der Strahlensatzfigur variiert.
Die Divisorverfahren verteilen die Restsitze, indem sie vorgeben, mehr als M Sitze proportional zu verteilen. Das Verfahren von HARE/NIEMEYER spricht allen Parteien zur Problemlösung einen gleichen Wert von zusätzlichen Stimmen zu (Verlängerung der horizontalen Kathete).