

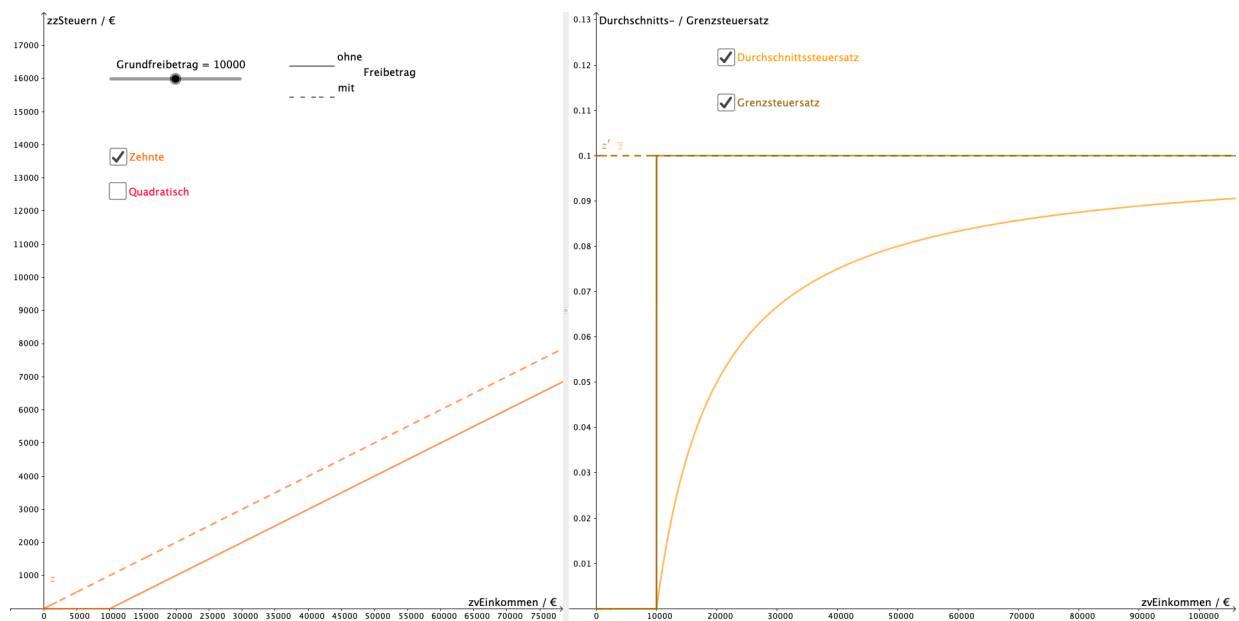
Grundfreibetrag

Mit dem Steuertarif wird eine Funktion definiert, die jedem möglichen Wert von zu versteuerndem Einkommen (zvEinkommen) die Höhe der zu zahlenden Steuern (zzSteuern) zuordnet.

Einer der ältesten Steuertarife der Menschen ist der **Zehnte**, nach dem man ein Zehntel seines Einkommens abgeben muss. Die zugehörige Funktion lautet $f(x) = \frac{1}{10} \cdot x$.

Mit dem Grundfreibetrag, der sich in der GEOGEBRA-Datei mit dem Schieberegler g einstellen lässt, wird eine Geldsumme bezeichnet, die nicht versteuert werden muss: Ist das zu versteuernde Einkommen x kleiner als g , müssen keine Steuern gezahlt werden, ist es größer wird nur der Betrag $(x - g)$ versteuert, also z. B. $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x - g)$.

Um die Bedeutung und Wirkung des Grundfreibetrages zu untersuchen, schaue dir die GEOGEBRA-Datei „Grundfreibetrag.ggb“ an.



Fragen zur Orientierung (zunächst nur für das Kontrollkästchen „Zehnte“)

- (1) Wie verändert sich die Steuerfunktion mit der Erhöhung des Grundfreibetrages („Grafik 1“ links)?
- (2) Aktiviere das Kontrollkästchen „Durchschnittssteuersatz“ („Grafik 2“ rechts). Wie verändert sich der Durchschnittssteuersatz mit der Einführung bzw. Erhöhung des Grundfreibetrages? Wie würdest du den Durchschnittssteuersatz berechnen?
- (3) Aktiviere nun das Kontrollkästchen „Grenzsteuersatz“. Wie verändert sich der Grenzsteuersatz mit der Einführung bzw. Erhöhung des Grundfreibetrages? Wie würdest du den Grenzsteuersatz definieren?
- (4) Wie lässt sich das Verhältnis von Durchschnitts- und Grenzsteuersatz zueinander beschreiben und welche Dynamik siehst du?
- (5) Was bedeutet ein Grundfreibetrag für eher ärmere und eher reichere Personen? Was passiert bei einer Gehaltserhöhung? Berücksichtige bei deinen Überlegungen auch Durchschnitts- und Grenzsteuersatz.

Frage zum Weiterdenken

- (a) Aktiviere das Kontrollkästchen „Quadratisch“ und beantworte obige Fragen in Bezug auf einen Parabelast als Steuerfunktion. Was ändert sich (nicht)?

Mögliche Antworten

Fragen zur Orientierung (zunächst nur für das Kontrollkästchen „Zehnte“)

- (1)
 - Die Funktion wird um den Wert des Grundfreibetrages g nach rechts verschoben, wobei die Funktion für $x \in [0, g]$ den Wert 0 annimmt.
- (2)
 - Ohne Grundfreibetrag ist der Durchschnittssteuersatz konstant: $\bar{z} = 0,1$. Mit Grundfreibetrag ist dieser eine monoton steigende Funktion mit dem Wertebereich $[0; 0,1)$.
 - Der Durchschnittssteuersatz ist immer 0 für $x \in [0; g]$. Mit steigendem Grundfreibetrag entfernt sich der Funktionswert an der Stelle $x > g$ immer mehr von der Geraden $\bar{z} = 0,1$.
 - *Die Form der Kurve, insb. das vermeintliche Krümmungsmaximum, ist allerdings der skalierten y-Achse geschuldet. Schüler:innen kann dies verdeutlicht werden, indem das scheinbare Krümmungsmaximum mit einem Punkt markiert wird und dann das Verhältnis der Achsen verändert wird. So lässt sich erkennen, dass der Punkt kein Krümmungsmaximum ist.*
 - *erwartete Antwort im besten Fall:* Der Durchschnittssteuersatz ist das Verhältnis von „zzSteuern“ zu „zvEinkommen“. Damit wird berechnet, wie viel Prozent Steuern pro verdientem Euro bezahlt werden.
- (3)
 - Ohne Grundfreibetrag ist der Grenzsteuersatz konstant: $z' = 0,1$. Mit Grundfreibetrag ist es eine Treppenstufenfunktion mit $z' = 0$ für $x \in [0, g)$ und $z' = 0,1$ für $x \geq g$.
 - Der Sprung bei $x = g$ verschiebt sich nach rechts mit steigendem Grundfreibetrag.
 - *erwartete Antwort im besten Fall:* Der Grenzsteuersatz ist der Steuersatz, der für den x . Euro gilt. An der Stelle $x = g$ wird am ehesten klar, dass es sich eigentlich um den Steuersatz für den nächsten verdienten Euro handelt, weil mit einem zvEinkommen von $x = g$ noch keine Steuer bezahlt wird. In diesem Punkt beginnt aber schon die Gerade mit der Steigung $z'(g) = 0,1$ (die Stelle ist auch mathematisch die interessanteste, weil die Steuerfunktion hier wegen unterschiedlicher rechts- und linksseitiger Grenzwerte des Differenzenquotienten nicht differenzierbar ist).
- (4)
 - Der Grenzsteuersatz ist meist größer als der Durchschnittssteuersatz (oder sie sind gleich).
 - Der Durchschnittssteuersatz nähert sich dem Grenzsteuersatz an, mit steigendem Grundfreibetrag geschieht dies immer langsamer.
- (5)
 - Während ärmere Personen nicht mehr entlastet werden, sobald ihr Einkommen unter dem Grundfreibetrag liegt, profitieren reiche Personen immer von einer Erhöhung des Grundfreibetrages (Durchschnittssteuersatz – und damit die zz Steuern – sinkt).
 - Sobald es einen Grundfreibetrag gibt, bezahlt keine Vermögensgruppe mehr den festgelegten Steuersatz von 0,1. Dieser Wert bildet aber für $x \geq g$ den Grenzsteuersatz.
 - Bei zvEinkommen, die nur wenig höher sind als der Grundfreibetrag, steigt der Durchschnittssteuersatz wesentlich schneller als bei hohen zvEinkommen. Je geringer der Grundfreibetrag ist, desto stärker ist der Effekt.

Frage zum Weiterdenken

- (a) (1) s. o.

- (2) Die Verschiebung ist parallel zum linearen Fall. Der Durchschnittssteuersatz mit Grundfreibetrag ist eine steigende Funktion, die immer mehr wie eine Gerade wird. Er hält einen gewissen Abstand zum Durchschnittssteuersatz ohne Grundfreibetrag, letzterer ist eine lineare Funktion. Die Berechnung erfolgt wie oben, ist aber nicht so ersichtlich.
- (3) Der Grenzsteuersatz ist eine lineare Funktion, die mit Erhöhung des Grundfreibetrages nach rechts verschoben wird. Eine Charakterisierung wird hier schwieriger. Wenn das Konzept des Steuersatzes für den nächsten (oder aktuellen) Euro verstanden ist, wird in der Visualisierung deutlich, dass für größere Vermögen auch höhere Grenzsteuersätze gelten, d. h. für Einkommensgewinne werden relativ mehr Steuern bezahlt.
- (4) Auch im quadratischen Fall ist der Durchschnittssteuersatz kleiner oder gleich dem Grenzsteuersatz, allerdings findet keine Annäherung wie im linearen Fall statt.
- (5) Die Steigung von Durchschnitts- und Grenzsteuersatz ist jeweils zumindest ungefähr gleich, damit hat ein Einkommensgewinn bei Personen, deren Einkommen knapp über dem Grundfreibetrag liegt, keine stärkeren Effekte als bei vermögenden Personen.