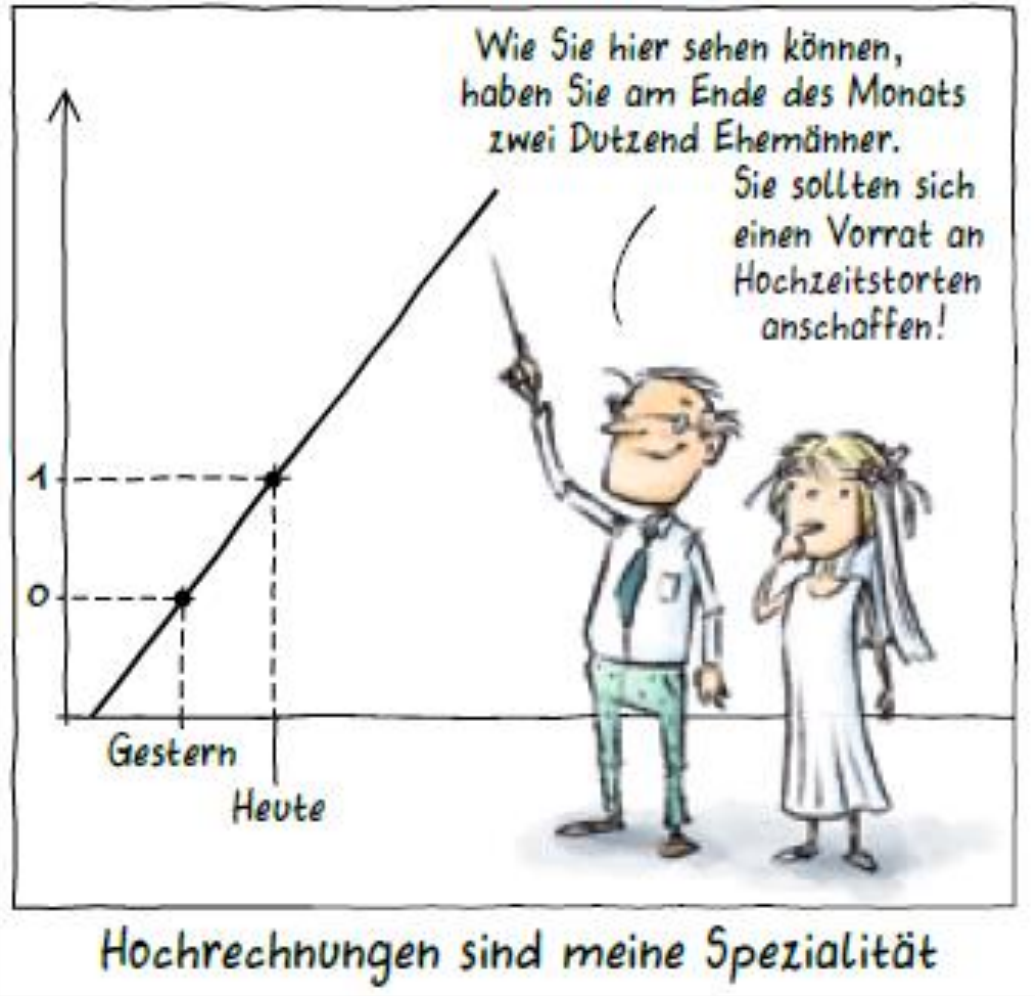
Henning Körner

Nicht immer, aber immer öfter – oder: Von Ameisenhaufen, einem Ponyhof, Schokolinsen, einer Vase und Einkommensverteilung

Die Gestalt der Wirklichkeit ist immer reichhaltiger als die Linienführung der Grundsätze.
Robert Musil

Da die exponentielle Regression am besten zu den Daten passt, muss es auch ein exponentielles Wachstum sein.
Tom, Klasse 10



9 Wachsen einer Ameisenkolonie

Ein Biologe überlegt, wie eine Ameisenkolonie wachsen könnte. Er stellt zwei verschiedene Modellrechnungen an:

(1)

Zeit in Monaten	Anzahl
0	100
1	200
2	300
3	400

(2)

Zeit in Monaten	Anzahl
0	100
1	200
2	400
3	800

a) Setze die beiden Modellrechnungen für die nächsten drei Monate fort.

b) Beschreibe in Worten den Zuwachs in jedem Monat gemäß dem Modell (1) und dem Modell (2).

c) Welches Modell könnte die Entwicklung einer Ameisenkolonie besser beschreiben? Diskutiert diese Frage in eurer Gruppe. Findet ihr ein Modell, das noch besser passt?

In der Mathestunde am Dienstag den 19.03.2004 haben wir in Gruppenarbeit eine Aufgabe über das Wachsen einer Ameisenkolonie berechnet.
Uns wurden zwei Modelle vorgegeben, bei Model A wuchs die Ameisenpopulation monatlich um 100 Ameisen, bei Model b verdoppelte sich die Anzahl monatlich.
Zuerst sollten wir die Modellrechnungen fortführen, dann diese beschreiben und als letztes mit unserer Gruppe darüber diskutieren , welches Model besser auf eine Ameisenkolonie zutrifft oder ein anderes, besser passendes Model finden. Wir sind zu dem Entschluss gekommen, dass das Model A zwar realistischer aber noch nicht ganz zutreffend ist, weil wir der Meinung sind, dass die Königin in einem Monat mehr als einhundert Eier in einem Monat legt.

A:
Bei diesem Modell kommen 100 Ameisen pro Monat hinzu!
B:
Bei diesem Modell kommt pro Monat die doppelte Menge Ameisen hinzu, als im vorigem Monat.
C:
Modell „A“ passt am besten, da nur die Königin Eier legt. Sie legt jeden Monat ungefähr die gleiche Menge Eier.
Tabelle „B“ würde passen, wenn jede Ameise, also auch eine normale, Eier legen würde.
Trotzdem ist es unrealistisch, denn eine Ameisen Königin legt eigentlich um die 1000 Eier! Und außerdem legt sie nicht jeden Monat genau 100 Eier.

Klasse 7

Modellieren mit Daten und Denken

1 Gummibärchen

Wie viele Gummibärchen sind in einer 1 kg-Tüte?

a) Man könnte natürlich alle zählen … oder auch ein Bärchen wiegen und dann … Begründe, warum beide Möglichkeiten nicht besonders sinnvoll sind.

b) Besorgt euch eine Waage und wiegt eine Handvoll Bärchen. Ermittelt damit eine vermutete Anzahl der Bärchen in der Tüte. Notiert eure Überlegungen.

c) Vergleicht eure Ergebnisse in der Klasse. Ihr habt vermutlich verschiedene Ergebnisse, woran liegt das? Betrachtet die Quotienten aus Gewicht und Anzahl der Bärchen, was fällt auf? Könnt ihr euch auf eine Anzahl einigen?

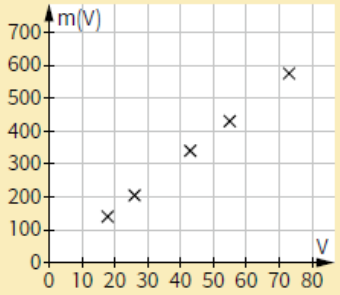
Basiswissen

Zuordnungen mit Daten

Frage: Wie groß ist die Masse von einem Kubikmeter Eisen?

Die Frage kann man nicht durch Ausprobieren beantworten. An kleinen Eisenstücken wird die Zuordnung zwischen Volumen und Masse von Eisen untersucht.
Die Tabelle zeigt einige Messwerte. Die Messwerte werden grafisch dargestellt.

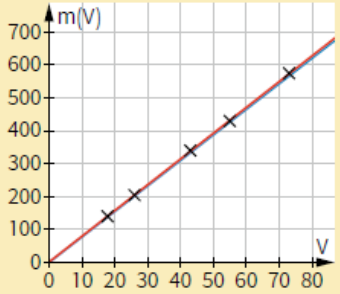
Volumen in cm^3	Masse in g	$\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ in $\frac{g}{cm^3}$
18	140	$\frac{140}{18} \approx 7{,}78$
26	205	7,88
43	340	7,91
55	430	7,82
73	575	7,87



Welche Art von Zuordnung ist sinnvoll?
Sind die Quotienten aus y-Werten und x-Werten annähernd konstant, ist Proportionalität eine sinnvolle Zuordnung. Auch eine grafische Darstellung unterstützt die Vermutung.

Wie findet man eine passende Zuordnungsvorschrift?
Modell 1
Mit einem der nach Anschauung geeigneten Wertepaar einen Proportionalitätsfaktor bestimmen.

$(43\,|\,340)$: $k = \frac{340}{43} \approx 7{,}91$; $m_1(V) = 7{,}91 \cdot V$



Modell 2
Das arithmetische Mittel der Quotienten zu den Messwerten als einen Proportionalitätsfaktor berechnen.

$\frac{7{,}78 + 7{,}88 + 7{,}91 + 7{,}82 + 7{,}87}{5} \approx 7{,}85$; $m_2(V) = 7{,}85 \cdot V$

Beide Zuordnungen passen gut zu den Daten, aber sie passen nicht exakt.

Antwort auf die Frage
Modell 1: $m_1(1\,000\,000) \approx 7\,910\,000$; Modell 2: $m_2(1\,000\,000) \approx 7\,850\,000$
Nach Modell 1 erhält man ungefähr 7,91 Tonnen, nach Modell 2 etwa 7,85 Tonnen.
Der Unterschied beträgt immerhin 60 kg. Beide Ergebnisse sind aber sinnvoll.

1 t ≙ 1 000 000 g
1 m^3 ≙ 1 000 000 cm^3

Klasse 8

Partnerarbeit

10 Ein Reiterhof

Die Gästezahl im Reiterhof ist seit 2005 zehn Jahre lang jedes Jahr in etwa um die gleiche Anzahl gewachsen. Aus den Jahren 2005 (185 Gäste) und 2012 (490 Gäste) liegen die Gästezahlen exakt vor.

a) Bestimmt mit diesen Werten die passende Funktionsgleichung und skizziert den Graphen mit den beiden Messwerten. (2005: $x = 0$)
Wie viele Gäste wird es 2016 geben, wenn die Entwicklung so weitergeht?

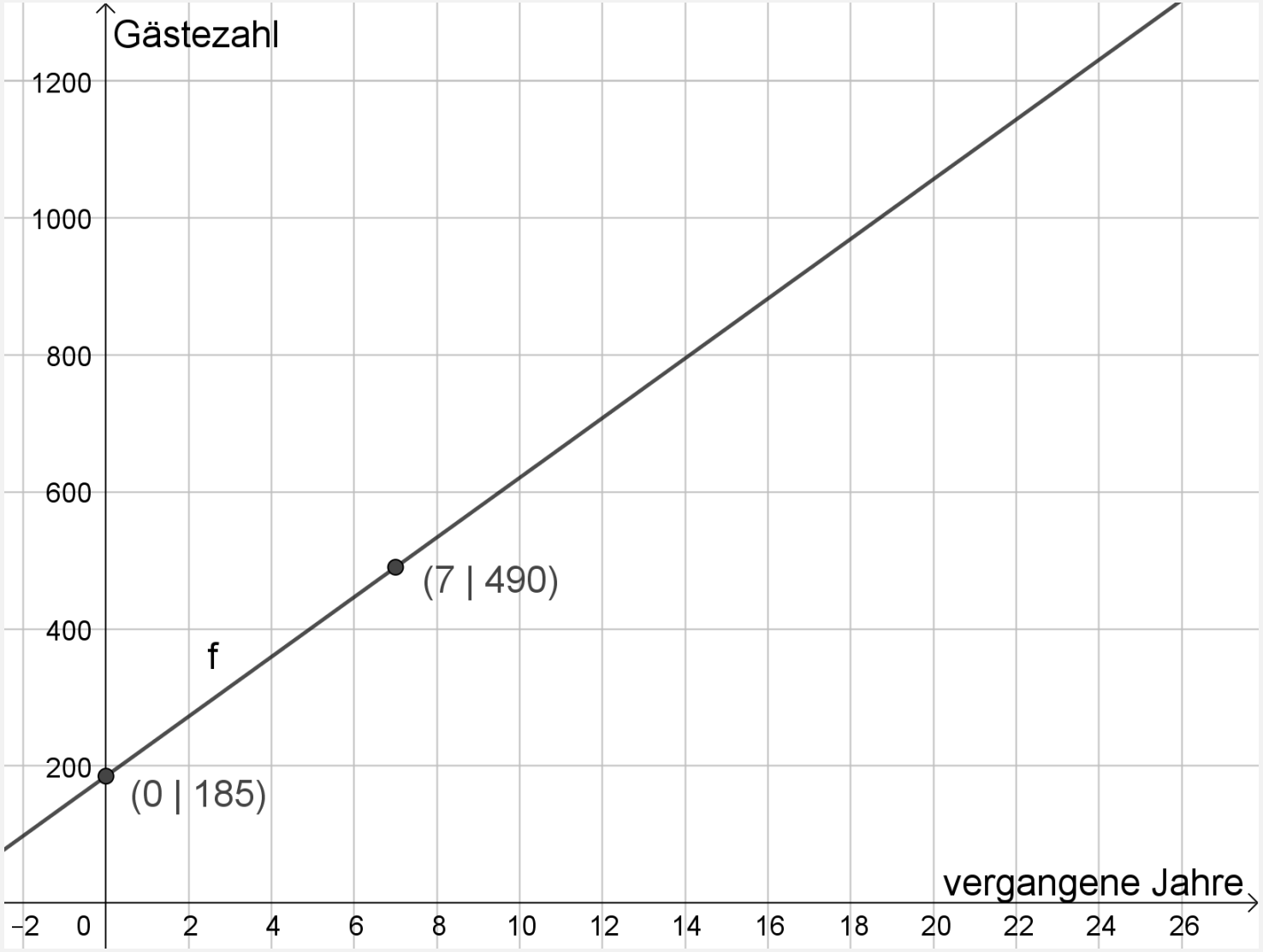
b) Ab 2016 werden die Gästezahlen jährlich aufgeschrieben.

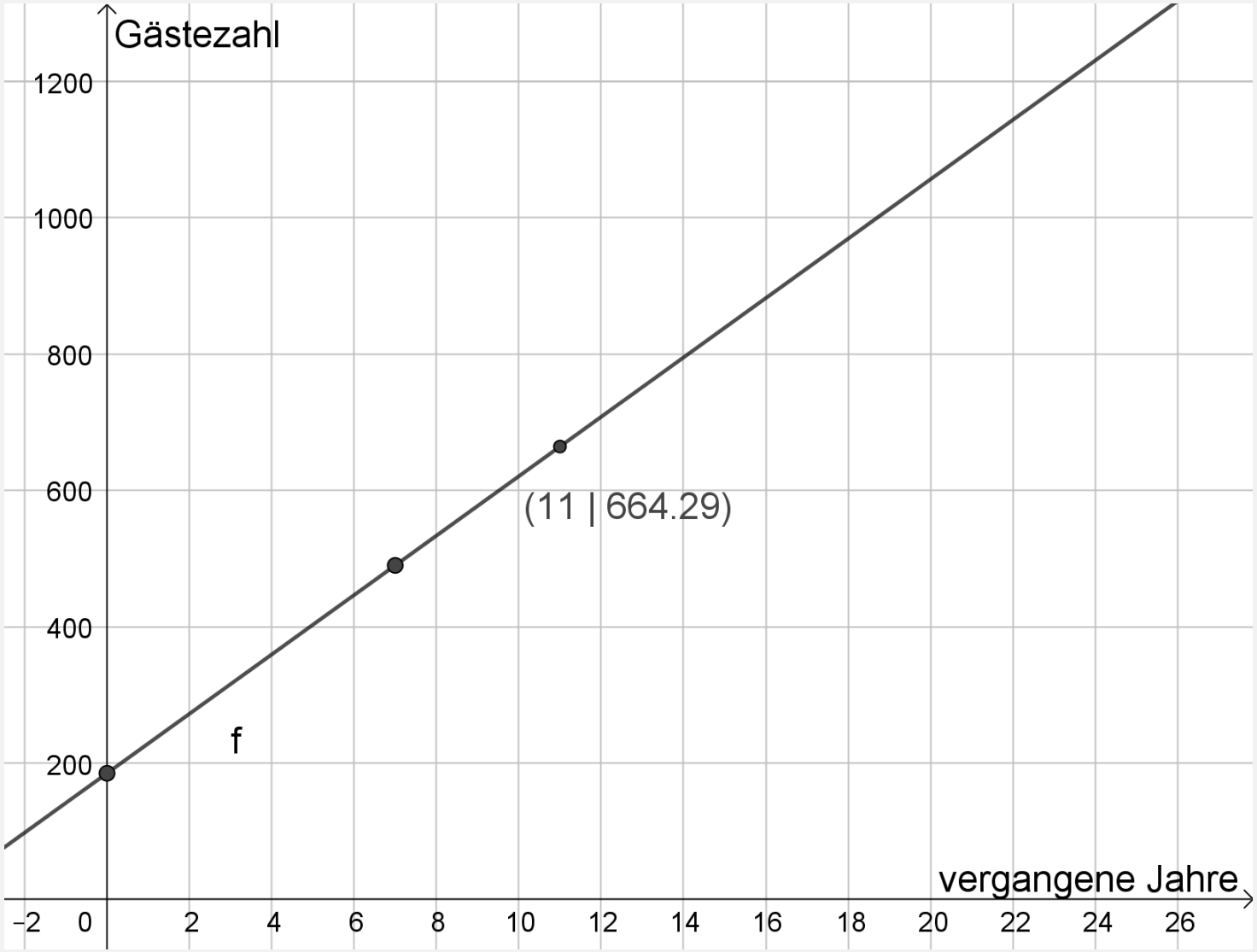
Jahr	2016	2017	2018	2019	2020
Gästezahl	654	678	776	753	779

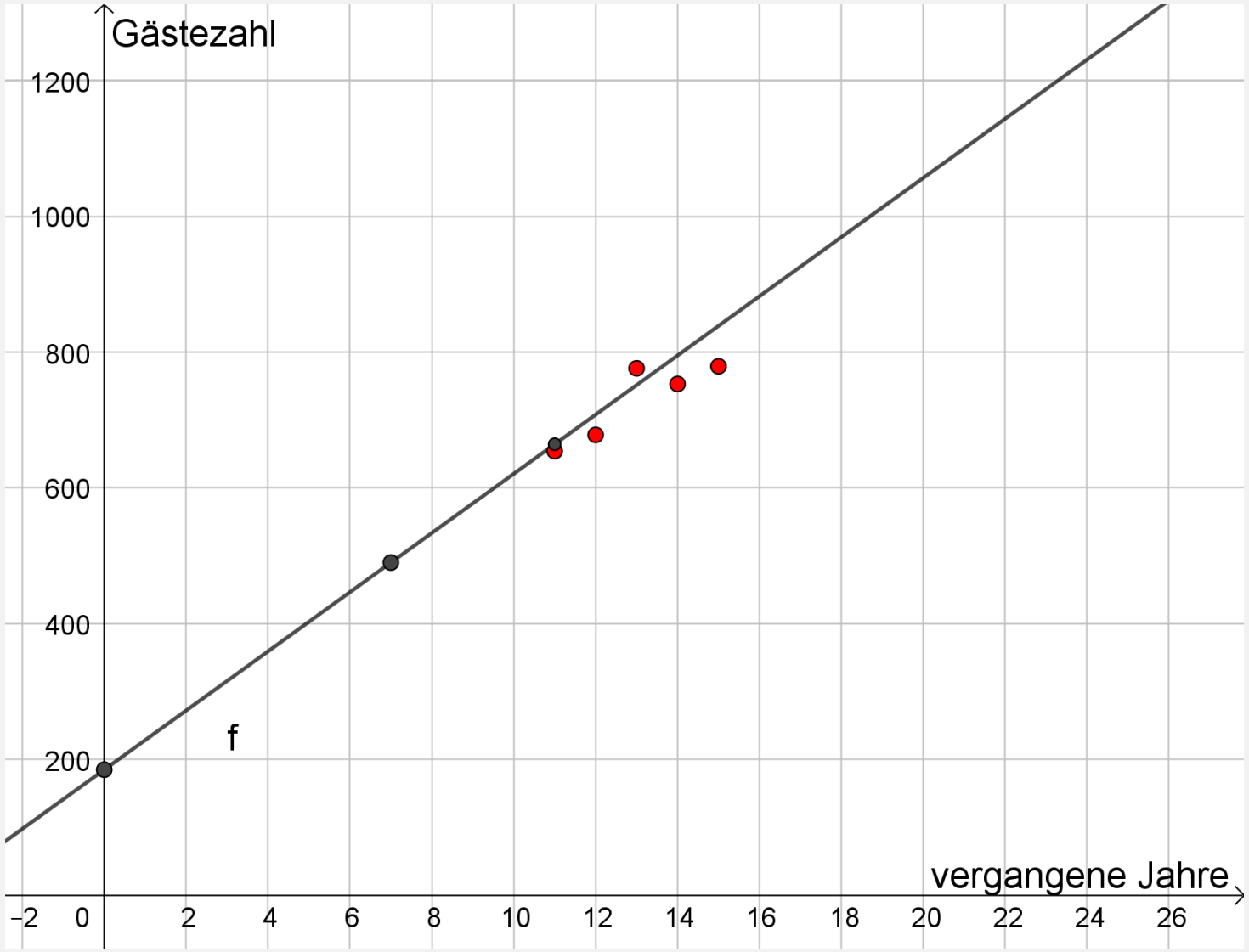
Übertragt die Werte in die Grafik aus a). Bleibt ihr bei eurer Funktion aus a)? Zeichnet eine Gerade ein, die sich „möglichst gut“ an die Punkte anpasst, und bestimmt deren Funktionsgleichung. Was bedeutet für euch „möglichst gut“? Macht Prognosen zu den Gästezahlen für 2022 und 2027. Vergleicht eure Lösungen und Meinung mit anderen Gruppen.

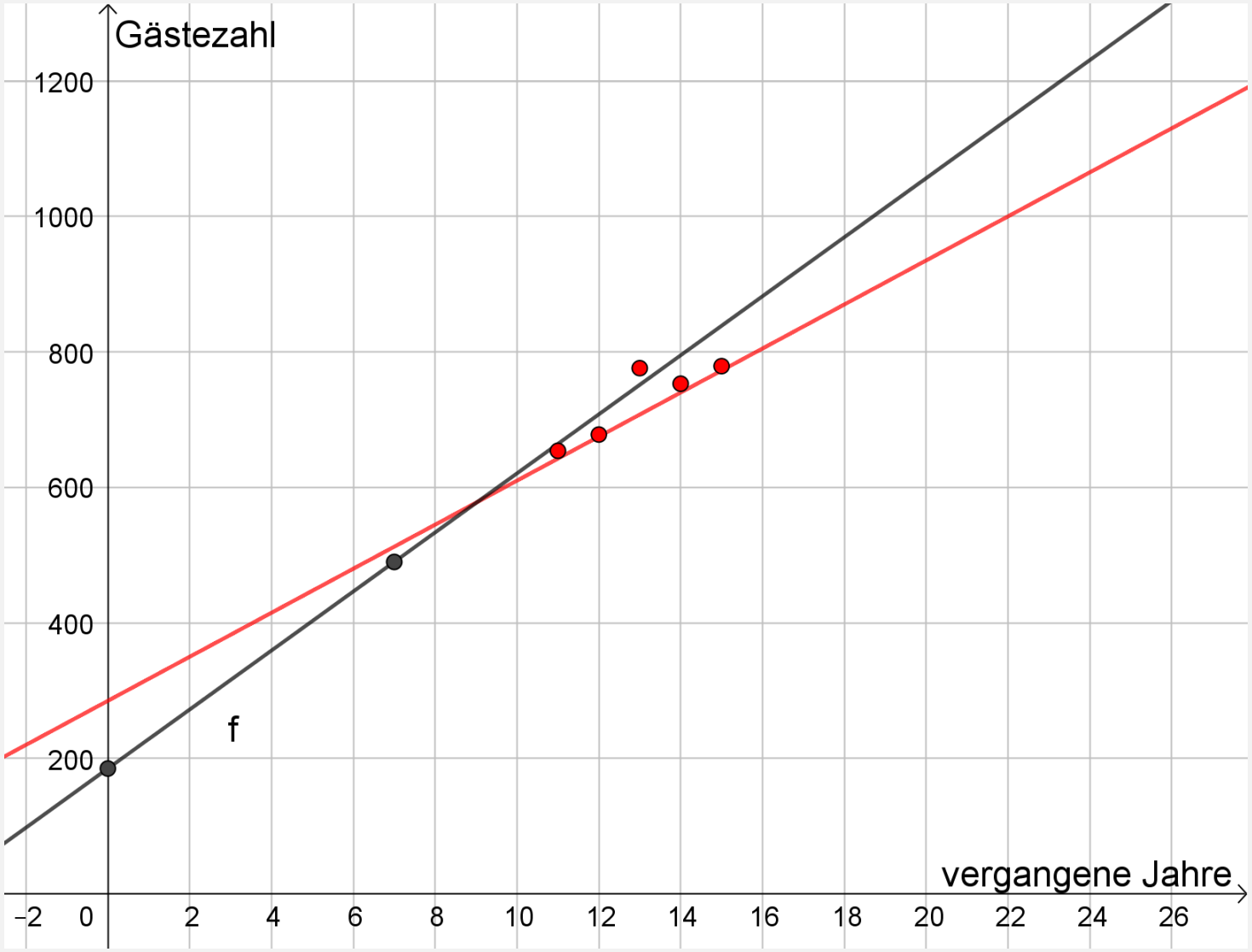
c) Was meint ihr: Für welche Werte von x kann euer Modell sinnvoll sein? Was sagt ihr, wenn 2027 die Gästezahl 876 betragen sollte?

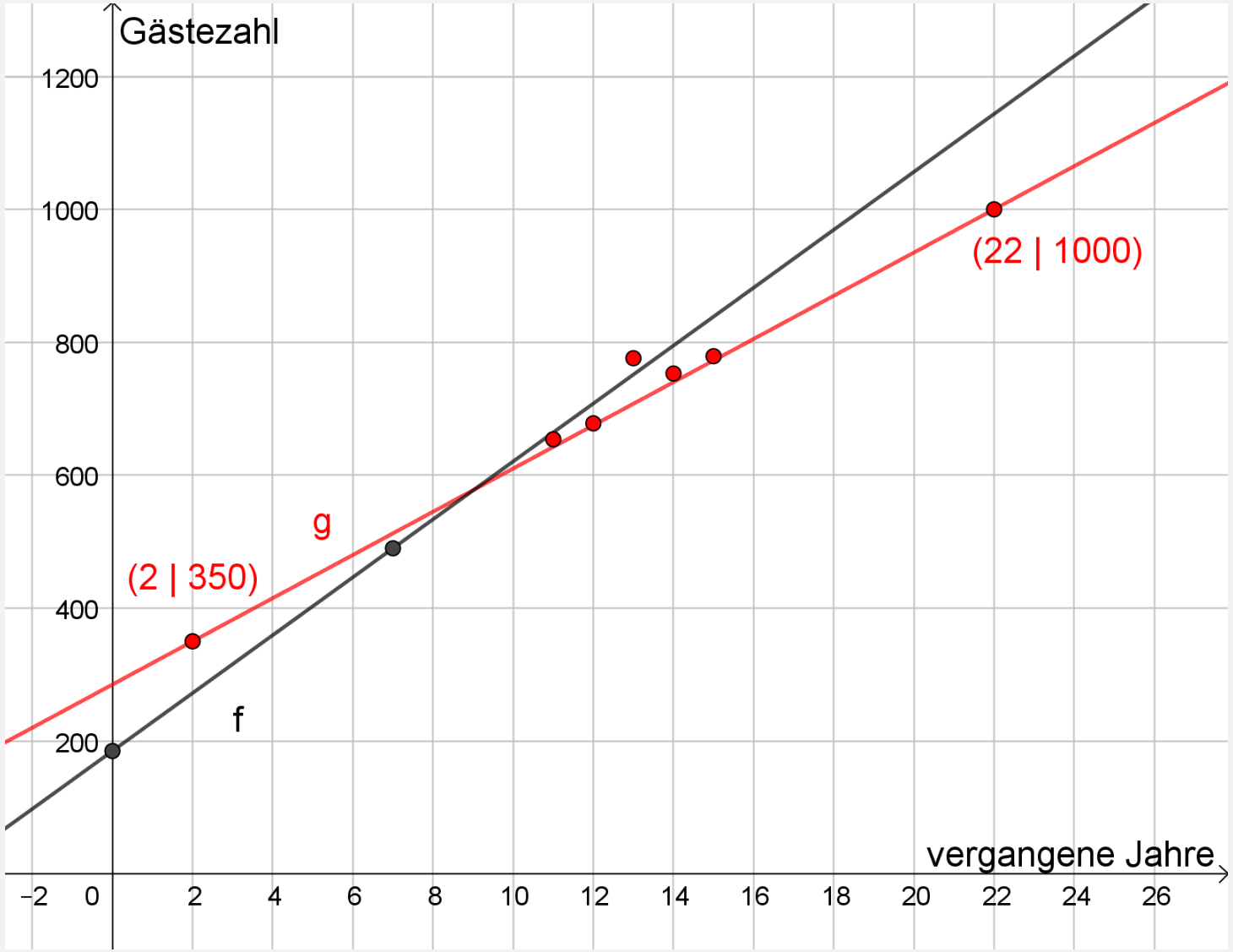
Mit „Modell“ ist eure gefundene Funktion gemeint.

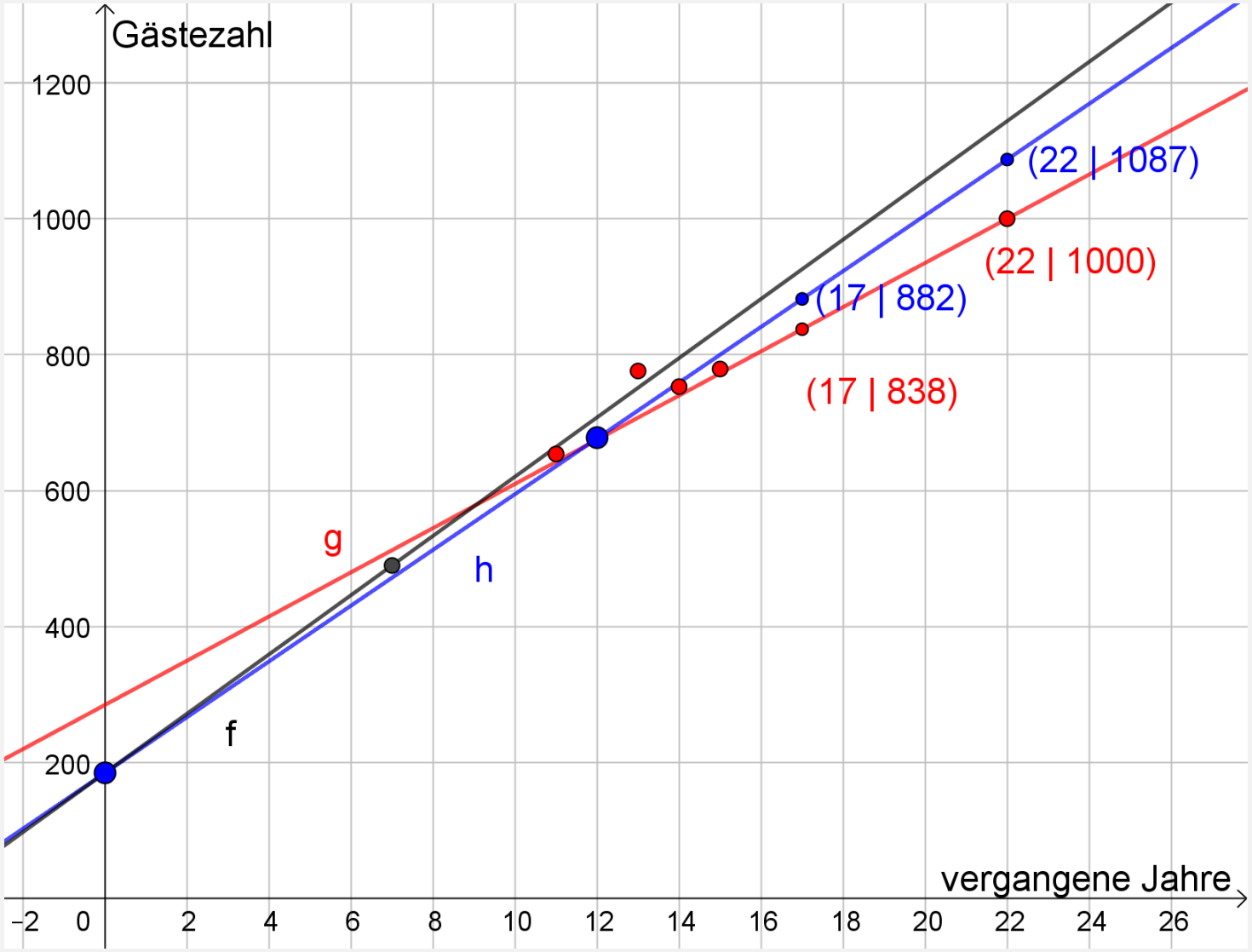

Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
(7 | 490)
f
(0 | 185)
vergangene Jahre
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26

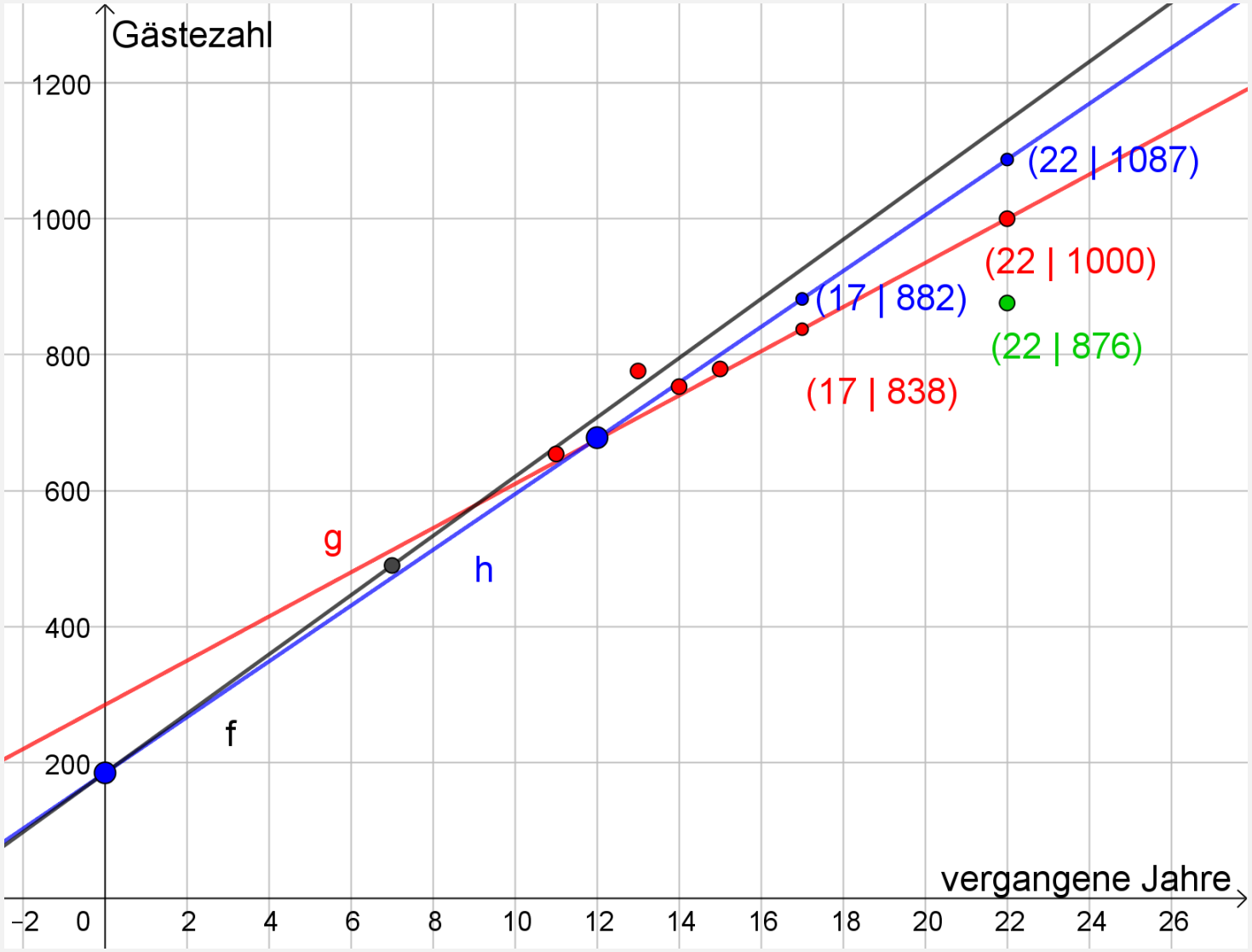

Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
(11 | 664.29)
f
vergangene Jahre
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26


Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
f
vergangene Jahre
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26


Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
f
vergangene Jahre
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26


Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
g
(2 | 350)
(22 | 1000)
f
vergangene Jahre
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26


Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
vergangene Jahre
(22 | 1087)
(22 | 1000)
(17 | 882)
(17 | 838)
g
h
f


Gästezahl
1200
1000
800
600
400
200
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
vergangene Jahre
(22 | 1087)
(22 | 1000)
(17 | 882)
(22 | 876)
(17 | 838)
g
h
f

Basiswissen

Bestimmung von linearen Funktionen aus Daten

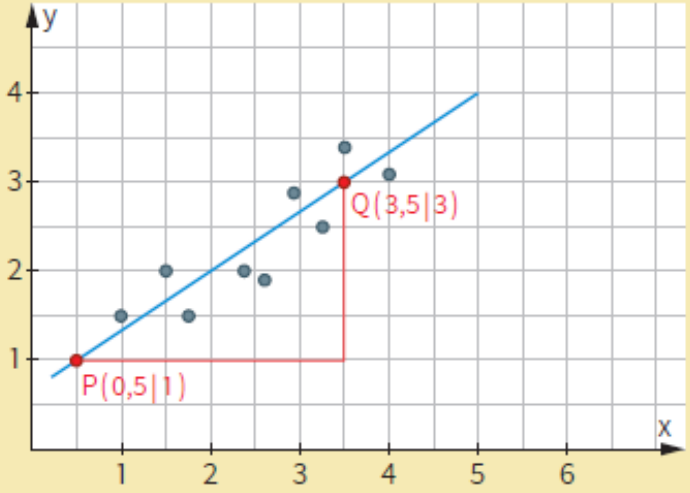
Den Zusammenhang zwischen zwei Größen kann man durch Messungen und Datenerhebungen untersuchen. Wenn man die entsprechenden Wertepaare in einem Diagramm darstellt, erhält man ein **Streudiagramm**. Liegen die Punkte in etwa auf einer Geraden, so weist dies auf einen linearen Zusammenhang der Größen hin. Man kann „nach Augenmaß" eine Gerade zeichnen und eine Funktionsgleichung aufstellen. Eine solche Gerade heißt **Ausgleichsgerade**. Damit kann man dann nicht gemessene Zwischenwerte oder bestimmte Trends und Voraussagen „berechnen.".

1. Streudiagramm zeichnen
Übertrage die gemessenen Wertepaare (Tabelle) in ein Streudiagramm.

2. Ausgleichsgerade ermitteln
Zeichne eine Gerade, die sich „möglichst gut" dem Punktemuster im Streudiagramm anpasst.

3. Funktionsgleichung bestimmen
Lies die Koordinaten von zwei möglichst weit auseinander liegenden Punkten auf der Geraden ab. Die Punkte P und Q müssen keine Messpunkte sein.
In der Regel nimmt man Punkte mit einfach ablesbaren Koordinaten.

x	1	1,5	1,75	2,4	2,6	3	3,25	3,5	4
y	1,5	2,0	1,5	2,0	1,9	2,8	2,5	3,5	3,1



$y = \frac{3-1}{3,5-0,5} \cdot x + b = \frac{2}{3}x + b$ und $b = \frac{2}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

Klasse 9

1 Pyramide

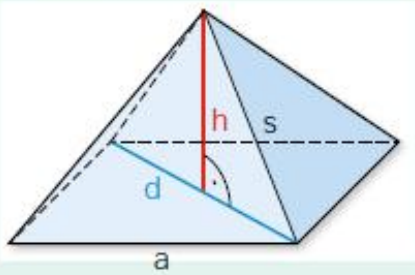
Im Innenhof des Louvre in Paris stehen eine große Glaspyramide und zwei kleine mit jeweils quadratischem Boden. Sie wurden von dem chinesisch-amerikanischen Architekten Ieoh Ming Pei entworfen und 1989 eröffnet. Sie dienen als Haupteingang in das Museum.

a) Die große Pyramide ist 21,65 m hoch und 35,42 m breit. Wie lang ist die Seitenkante?

b) Die kleine Pyramide ist 7,60 Meter breit. Die Glasrauten haben 1,8 m lange Seiten. Wie hoch ist die Pyramide?

c) Untersuche mithilfe der Strecken d und h, ob die beiden Pyramiden zueinander ähnlich sind.

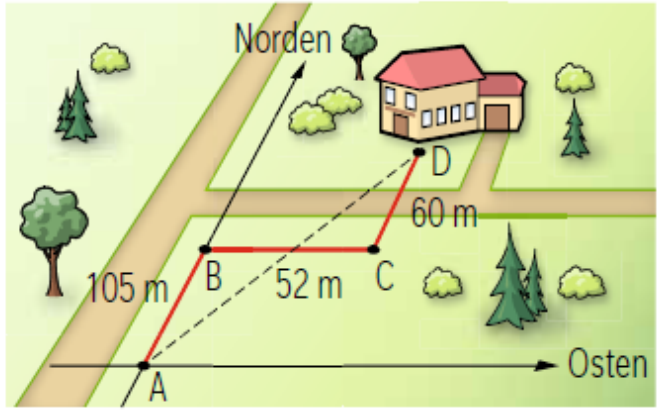
d) Welche Aspekte der Realität bleiben unberücksichtigt?



13 Telefonkabel

Ein Telefonkabel ist von Punkt A aus zum Haus wie in der Abbildung darestellt, verlegt. Es soll ein neues Kabel verlegt werden. Finde verschiedene Möglichkeiten.

- Welche Annahmen müssen gemacht werden?
- Welche Aspekte der Realität bleiben unberücksichtigt?



Modellieren mit rechtwinkligen Dreiecken

Reale Probleme sind oft komplex. Meist interessieren aber auch nur ausgewählte Aspekte. Deshalb werden Annahmen gemacht, mit denen die Situation viel einfacher wird. Erst dann wird es möglich, ein mathematisches Modell zu erstellen und damit zu rechnen. Die Ergebnisse müssen dann in der Realität überprüft werden.

Realität

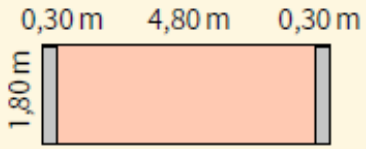
Zugeparkt?

Autolänge: 4,80 m
Parklücke: 5,40 m

Annahmen:

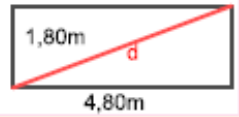
- Fahrer(in) kann parken.
- Lenkeinschlag möglich
- Bordstein nicht berück-sichtigt.
- Autoform rechteckig

Mathematisches Modell



Modell auswerten und mathematisch lösen

Die Länge der Diagonalen des Autos bestimmen.



$d^2 = 4{,}80^2 + 1{,}80^2 = 26{,}28$

$\Rightarrow d = \sqrt{26{,}28} \approx 5{,}13$

Mathematische Lösung in der Realität interpretieren

Die Diagonale des Autos ist ca. 25 cm kleiner als die Parklücke, es müsste daher passen.

Lösung in der Realität überprüfen

Ein Auto entsprechend parken. Prüfen, ob sich das Auto ausparken lässt?

2 Parabeln aus Scheitelpunkt und Punkt bestimmen

a) Die Gleichung $f(x) = a \cdot (x - 2)^2 - 3$ legt für jedes a eine Parabel fest. Wie verändert sich die Parabel, wenn man a variiert? Skizziere.
   - Welchen Wert muss man für a wählen, damit die Parabel durch den Punkt $P(4|3)$ verläuft? Löse zunächst nach Anschauung, dann mit einer Rechnung.

b) Durch den Scheitelpunkt $S(-1|4)$ und den Punkt $P(2|-5)$ wird eine Parabel festgelegt. Skizziere die Parabel und ermittle eine Funktionsgleichung der Parabel.

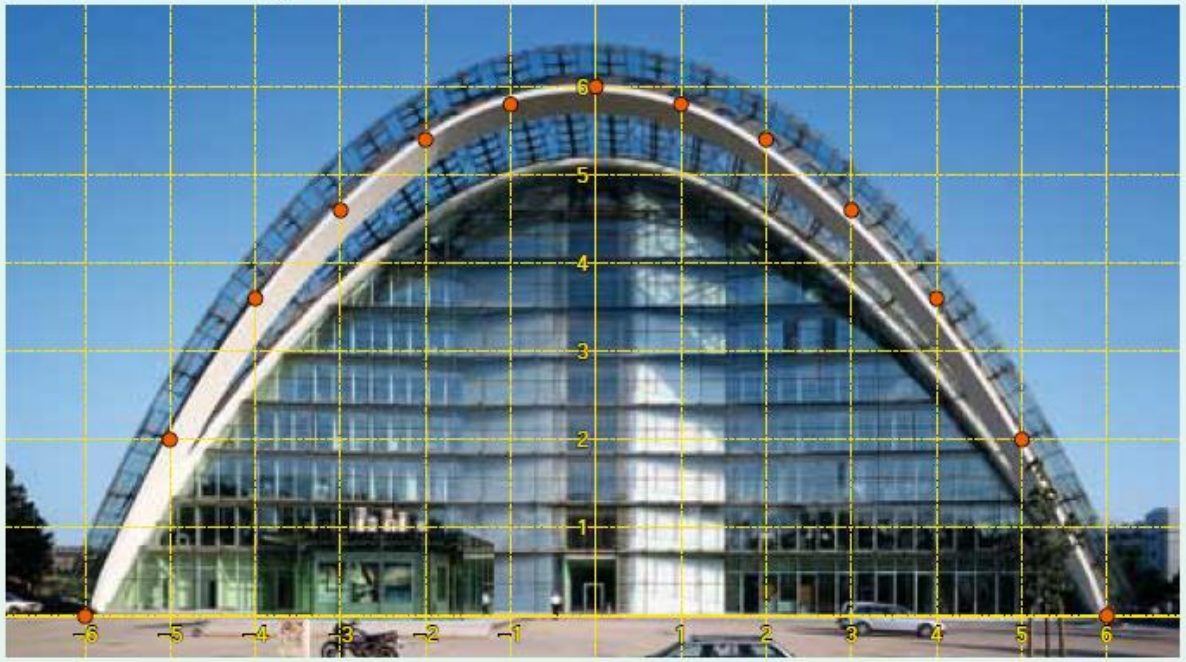
3 Parabeln aus Nullstellen und Punkt bestimmen

a) Die Gleichung $f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$ legt für jedes a eine Parabel fest. Wie verändert sich die Parabel, wenn man a variiert? Skizziere.
   - Welchen Wert muss man für a wählen, damit die Parabel durch den Punkt $P(3|-2)$ verläuft? Löse zunächst nach Anschauung, dann mit einer Rechnung.

b) Durch die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ und den Punkt $P(2|3)$ wird eine Parabel festgelegt. Skizziere die Parabel und ermittle eine Funktionsgleichung der Parabel.

1 Der Berliner Bogen in Hamburg

Parabeln treten häufig bei Brücken und Gebäuden auf.



Der parabelförmige Bogen soll durch eine quadratische Funktion beschrieben werden. Dazu werden aus der Abbildung Punkte abgelesen.

$P_1(6|0)$; $P_2(5|2)$; $P_3(4|3{,}6)$; $P_4(3|4{,}6)$; $P_5(2|5{,}4)$; $P_6(1|5{,}8)$; $P_7(0|6)$

Man kann mit unterschiedlichen Strategien eine geeignete Gleichung finden.

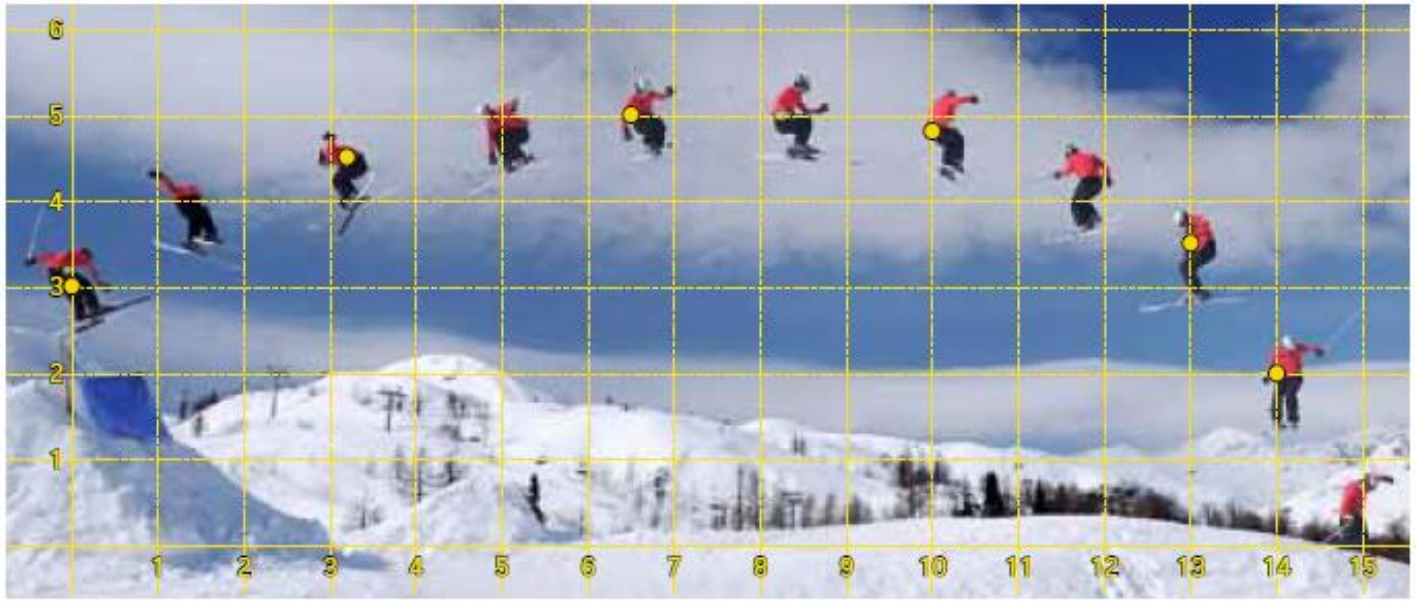
(1) Scheitelpunkt $(0|6)$ und ein weiterer Punkt.
Ansatz: Scheitelpunktform

(2) Nullstellen und ein weiterer Punkt.
Ansatz: faktorisierte Form

Bestimme mit beiden Strategien jeweils zwei quadratische Funktionen. Überprüfe mithilfe der angegebenen Punkte, ob die gefundenen Funktionen gut passen. Findet ihr eine am besten passende Parabel?

Finde eine geeignete Funktion für den inneren Bogen.

10 Snowboarding



Mit einer Kamera werden die Flugbahn eines Skiakrobaten gefilmt und einzelne Positionen gemessen.

Weite in m	0	3	6,5	10	13	14
Höhe in m	3	4,5	5	4,8	3,5	2

a) Wo landet der Snowboarder? Erstelle ein Streudiagramm und skizziere eine passende Parabel nach Augenmaß. Bestimme die Funktionsgleichung und beantworte die Frage. Vergleiche mit den Lösungen anderer in deiner Klasse.

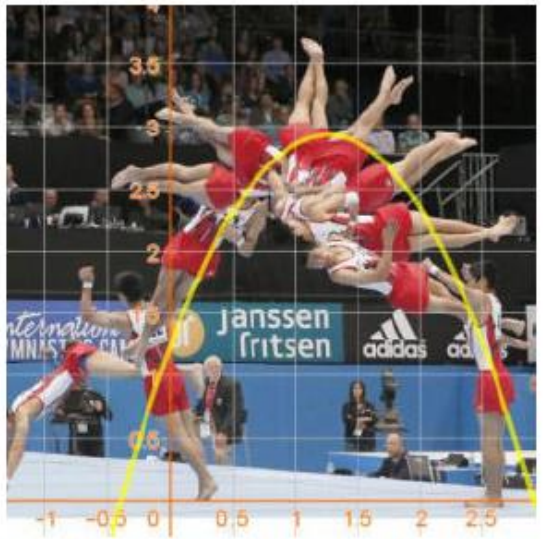
b) Finde eine passende Funktion mithilfe eines DGS oder Funktionenplotter. Lies dazu die Hinweise im folgenden Basiswissen.

Übungen

11 *Parabeln im Sport*

Aus der Physik weiß man, dass die Flugkurve des Körperschwerpunktes eine Parabel ist. Modelliere den Weitsprung und den Salto rückwärts.

A(0|0,8); B(0,7|1); C(1,4|1,1); D(2,1|1,1); E(2,7|1|); F(3,4|0,85)



Die Flugkurve des Körperschwerpunktes legt die maximal mögliche Weite fest. Wie weit kann der Weitspringer höchstens springen?

12 **Bremsen bei nasser Fahrbahn**

Ein neuer Allwetterreifen soll getestet werden. In einem Test wird die Abhängigkeit des Bremsweges b von der Geschwindigkeit v bei nasser Fahrbahn untersucht. Die Tabelle gibt die Ergebnisse an.

Für eine trockene Fahrbahn gilt die Faustregel: $b(v) = 0{,}01\,v^2$

Erstelle verschiedene quadratische Modelle zu dem Bremsvorgang auf nasser Fahrbahn. Vergleicht die Modelle untereinander und mit der Faustregel für trockene Fahrbahnen.

Geschwindigkeit (km/h)	Bremswegläge (m)
20	5,5
40	19
60	47
80	91
100	133
120	210

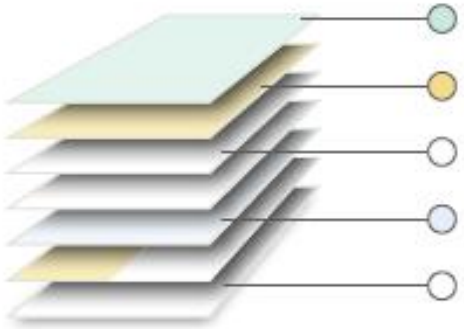
Werbung

Auf neuen Wegen **sicher durch den Unterricht.**

Mathematik Neue Wege arbeitet effektiv, zeitoptimiert und variabel.

Für jede Situation bietet das Lehrwerk sichere Wege zum Kompetenzerwerb.

So fördern Sie kooperatives Lernen und schulen prozessorientierte Kompetenzen:



EINSTIEG
Handlungsorientierter Einstieg

BASISWISSEN
Selbstständiges Erarbeiten der Inhalte anhand von Beispielen

ÜBUNGEN
Situativ angepasst differenzierte Aufgaben auswählen

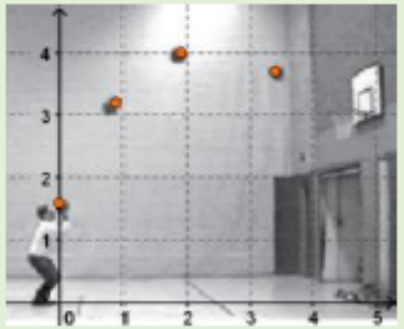
ÜBUNGEN PLUS
Differenzierungsangebot zum Erweitern und Vertiefen

SICHERN UND VERNETZEN
Differenzierungsangebot zum Trainieren, Verstehen und Anwenden

Modellieren mit Daten – der Modellbildungskreislauf

Mit Funktionen, die zu Daten passen, können rechnerisch Vorhersagen gemacht werden. Die Ergebnisse müssen dann in der Realität überprüft werden.

Realität



Landet der Ball im Korb?

→

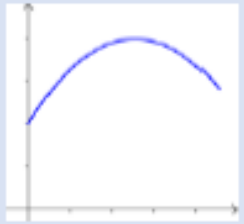
Annahmen:

- Der Wurf ist durch die Abbildung festgelegt.
- Der Flug wird nicht durch Wind etc. verändert.

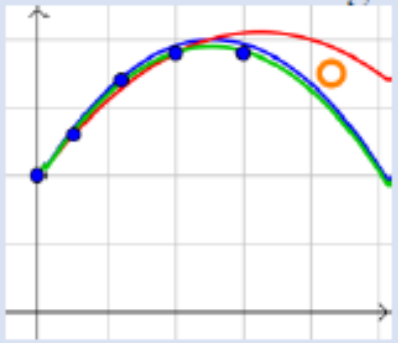
→

Mathematisches Modell

Die Flugkurve ist eine Parabel



Mit ausgewählten Informationen passende Funktion finden, z.B. mit Regressionsfunktion oder Schiebreglern.



←

Mathematische Lösung in der Realität überprüfen

- interpretieren: Es gibt verschiedene Funktionen, die gut zu den Daten passen. Die Lösung des Problems ist nicht eindeutig.
- überprüfen: Landet der Ball im Korb?

←

Klasse 10

3 Ein Experiment mit Schokolinsen

Material: Eine Tüte Schokolinsen, die auf einer Seite bedruckt sind.
(1) Vier Linsen werden auf den Tisch „gewürfelt".
(2) Zu jeder Linse mit obenliegendem Aufdruck wird eine Linse dazugelegt.
(3) Alle Linsen zusammen werden wieder auf den Tisch „gewürfelt".
(4) Siehe (2)

a) Schätzt, wie lange ein Spiel dauert, bis alle Schokolinsen aus der Tüte auf dem Tisch liegen.
Spielt und füllt die Tabelle aus.

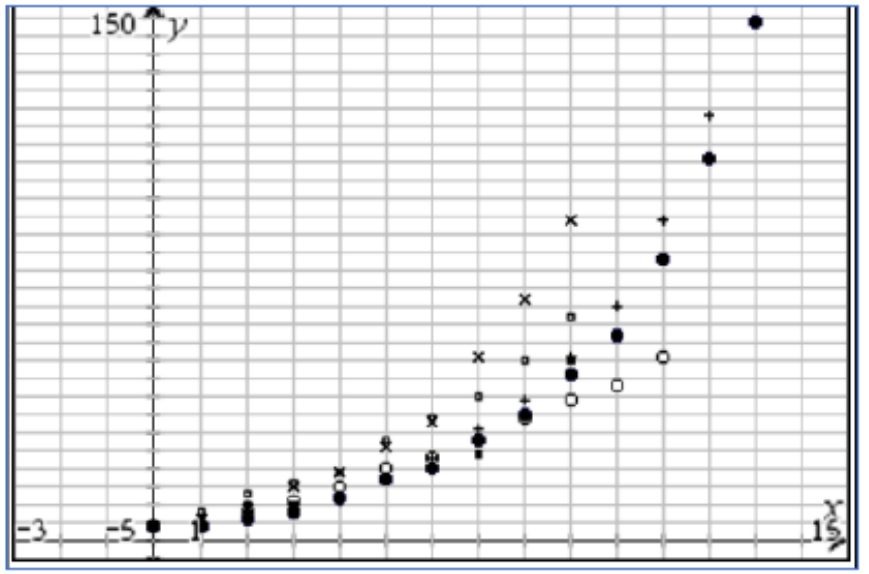
Anzahl der Würfe	1	2	3	...
Anzahl der Linsen	4			

- Wie lange kann man mit 5000 Schokolinsen spielen?
- Wie viele Schokolinsen braucht man, damit das Spiel 30 Würfe lang dauert?

Schätzt zunächst auf der Grundlage eurer Daten Antworten auf die beiden Fragen.
Um Lösungen zu errechnen, müsste man einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Würfe und der Anzahl der Linsen finden. Skizziert dazu den Datensatz und sucht eine geeignete Funktion. Beantwortet damit die Fragen.
Vergleicht die Ergebnisse in der Klasse.

Schätzungen:

Gruppe	Werte	∅	Spannweite
ABFS	12,17,18,20	16,75	8
AJL	52,44,43	46,33	9
ALMN	22,20,15,16	18,25	7
LMMR	10,8,20,15	13,25	12
AJJC	22,60,70,100	63	78
DKT	11,15,12	12,67	3



Leider fehlen bei allen Gruppen die Schätzungen zu den fragen aus b).

AJL | LMMR

$f(x) = x^2 + 4$

$5000 = x^2 + 4 \quad |-4$

$4996 = x^2 \quad |\sqrt{}$

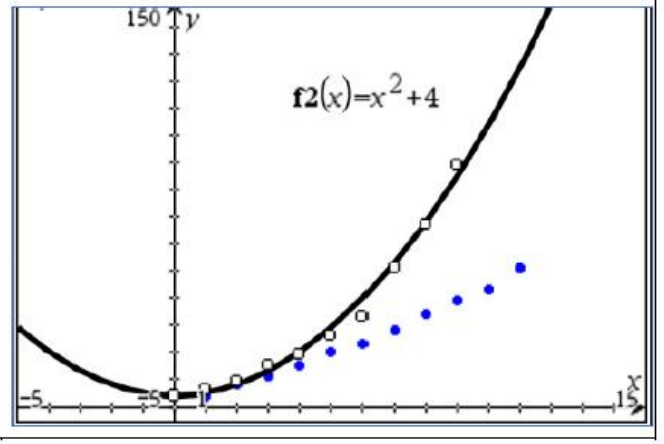
$\sqrt{4996} = x$

$f(30) = 30^2 + 4$

$f(30) = 904$

5000 m&m	71
30-mal	904

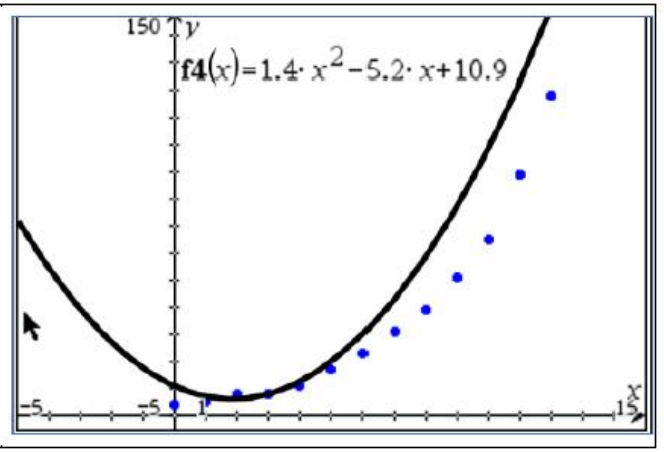
Anmerkung Körner:
Die Messwerte von AJL liegen nach Anschauung eher auf einer Geraden.



ALMN

→TC ⇒ a≈1,4
b≈-5,2
c≈10,9
· f(x) = a·x²+b·x+c
→ eingesetzt:
f(x) = 1,4·x² - 5,2·x + 10,9

5000 m&m	62
30-mal	1115



ACJJ

—> ist nicht proportional

—> es kommt immer ca. die Hälfte dazu [2 Seiten]

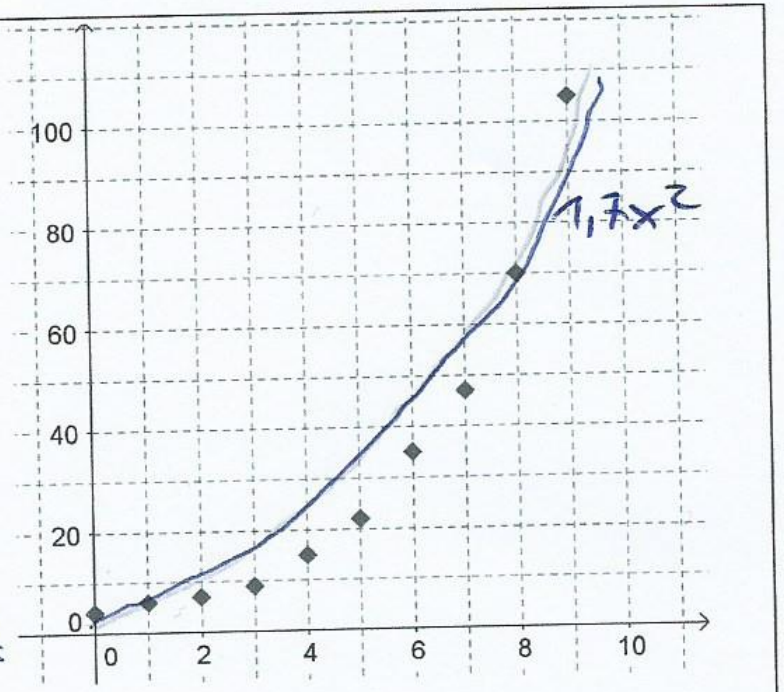
DKT

Es gibt keine genaue Funktion

- Eine ungefähre ist:

Gruppe Sarah

1. Daten in TR eingegeben
2. Normalparabel → geht/passt nicht
3. $2x^2$ → ähnlich, aber immer noch nicht (zu steil)
4. $1{,}5x^2$ → " (zu flach)
5. $1{,}7x^2$ → sehr ähnlich (aber nicht „krumm" genug)
   ↳ Nehmen wir
6. ~~Window vergrößert~~ [Tabelle]

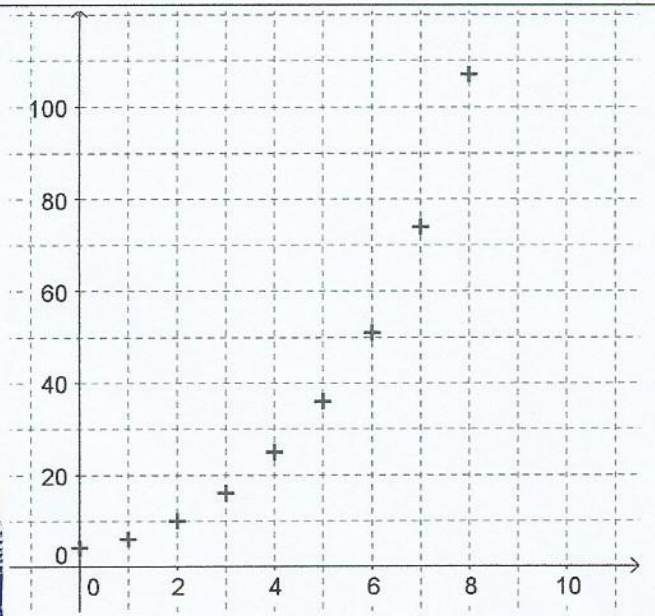


• Wie lange kann man 5000 m&m's spielen?
→ Man muss ungefähr 54 mal spielen.

• Wie viele m&m's braucht man, damit das Spiel 30 Würfe lang dauert?
→ Man braucht ca. 1530 M&M's

Gruppe Marlene

Wir haben zuerst die Werte in den GTR (Data Matrix) eingegeben. Danach haben wir im Koordinatensystem den Graphen zeichnen lassen. Danach haben wir in der Tabelle nach dem x Wert 30 gesucht. Die Lösung war 5 786.



Wir haben unter Data Matrix im Menupunkt F5 den Berechnungstyp 9 ausgewählt. Nachdem dies nicht funktionierte wählten wir Berechnungstyp A aus. Dies funktionierte und passte.

① 28,1 Kunden

② [redacted] M & Ms

6335,4

Durch Raten 3. Term: $4 \cdot 1{,}5^{8}$

Gruppe Marvin

2) Durch Ausprobieren:

- Wahrscheinlichkeit/Chance 50%, dass m oben liegt

- Anzahl der m&m wird somit um die Hälfte größer ($x \cdot 1{,}5$) x = Anzahl der m&m vorher

↳ 30 mal wiederholen

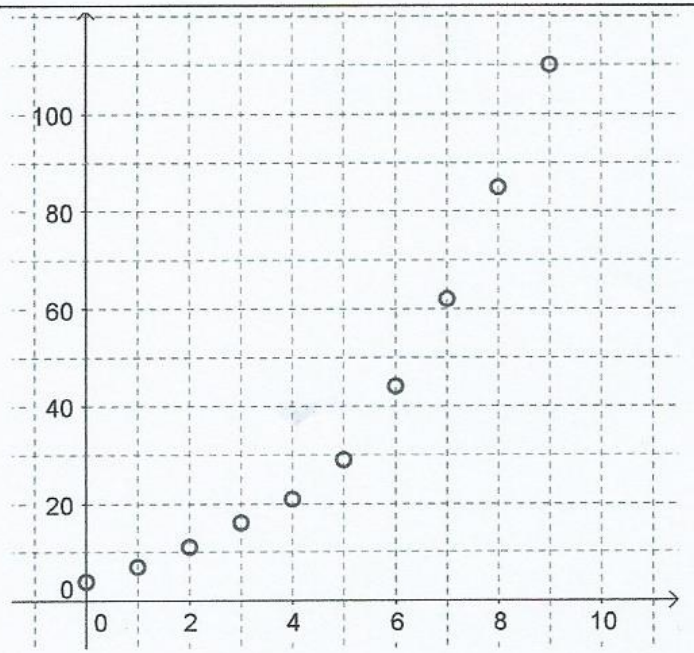
Ergebnis (nach 30 Wiederholungen):

Anzahl der m&m ≈ 767.004

y: Anzahl m&m (nachher)
x: Anzahl der Würfe

$y = 4 \cdot (1{,}5)^{x}$

$y = 4 \cdot (1{,}5)^{30} \approx 767.004$



1) $5000 = 4 \cdot (1{,}5)^{x}$

Lösung mit TC:

$x \approx 17{,}59$

, also wären die m&m nach 18 Versuchen aufgebraucht

Marvin, Mika, Chian, Silas

ABFS

b) Vermutung: (1) *Immer ca. 1,5-fache der vorherigen Anzahl*

Spielt!

x	Anzahl der Würfe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	Anzahl der m&m	4	4	6	8	12	17	20	28	35	46	57	78	106	144

Aus der Tabelle entsteht:

(2) *Der dazukommende Anteil scheint immer kleiner zu werden.*

(3) *Beobachtung (1) ist falsch, jedoch fällt auf, dass die dazukommenden Werte oft 1/3 des alten Anteils sind.*

c) Es ist eine längere komplizierte Rechnung erforderlich, denn selbst wenn wir den dazu kommenden Anteil mit immer $\frac{1}{3}$ festlegt, muss man praktisch jeden "Wurf" einzeln ausrechnen, da sich der Anteil immer auf den vorherigen Wert bezieht:

Wenn Wurf 0 = n_0 m&m's haben wir bei Wurf 1 $\frac{4}{3} n_0 = n_{\#1}$ und bei Wurf 2 $\frac{4}{3} n_1 = n_{\#2}$ etc...

1) Wir haben unser beschriebenes Verfahren fortgeführt und bei Wurf 29 (n_{29}) = 4524

2) und bei Wurf 30 (n_{30}) = 6032 m&m's je nach Spiel wird man also um die 29/30 mal würfeln können

Realität

Wie entwickelt sich die Einwohnerzahl der USA?

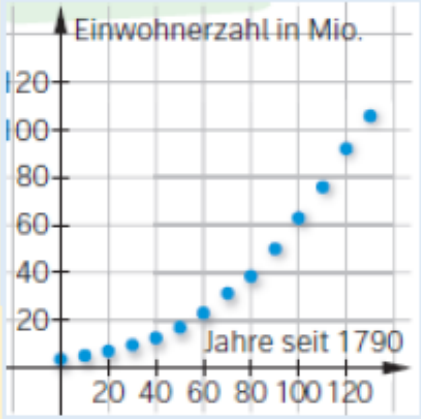
→

Annahmen:

- Entwicklung verläuft „so weiter“.
- Keine extreme Einflüsse
- geographische Größe bleibt.

→

Mathematische Modelle



Passende Funktionstypen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$g(x) = a \cdot b^x + c$

↓

- Analyse der Daten (Differenzen, Quotienten)
- mit geeigneten Punkten Funktion bestimmen.
- Regressionsfunktionen

←

Mathematische Lösung in der Realität überprüfen

- interpretieren: Trotz zu Daten gut passender Funktionen sehr unterschiedliche Prognosen.
- überprüfen: reale Einwohnerzahlen ermitteln.
- Wirkzusammenhang?

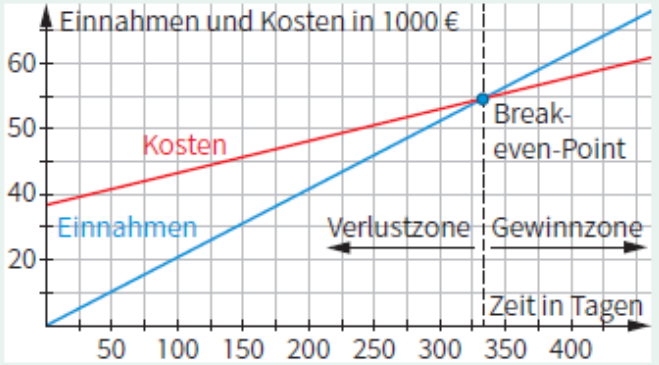
←

Modellieren mit Denken und Daten

Exkurs

Break-even-Point (Gewinnschwelle)

Wenn die Kosten eines Unternehmens die Einnahmen übersteigen, verliert das Unternehmen Geld und läuft Gefahr, bankrott zu gehen. Wenn Kosten und Einnahmen gleich sind, dann hat das Unternehmen den Break-even-Point erreicht.
Ein Break-even-Diagramm ist eines der Standard-Werkzeuge von Wirtschaftsfachleuten.



Das Diagramm zeigt auf einen Blick, wo die Verlustzone aufhört und die Gewinnzone beginnt.

2 Hotelmanagement

Ein Hotelmanager macht eine Gewinn-Verlust-Rechnung für ein Hotel mit 100 Zimmern.

Kosten:	Zinsen, Steuern, Versicherungen jährlich	150 000 €
	pro vermietetem Zimmer täglich	30 €
	pro leer stehendem Zimmer täglich	10 €
Einnahmen:	Zimmermiete, falls vermietet, täglich	60 €

Das Hotel ist an 365 Tagen im Jahr geöffnet. Wie viele Zimmer müssen jeden Tag im Durchschnitt vermietet sein, damit das Hotelunternehmen am Ende des Jahres gerade den Break-even-Point erreicht?
Bestimme für die Kosten und die Einnahmen jeweils eine Funktion.

5 Schülerfirma

Eine Schülerfirma möchte Warmhaltebecher vertreiben. Dabei können Firmen auf dem Becher Werbeflächen kaufen. Vor der Gründung der Schülerfirma schätzen die Schülerinnen und Schüler die Kosten und den Preis, den sie erzielen können.

variable Kosten: Materialkosten (Einkauf Becher) pro Becher 1,95 €
Banderole mit Werbeaufdruck pro Becher 0,45 €
fixe Kosten: 450,00 € für Verwaltung, Grafiker, Werbung
Einnahmen: aus dem Verkauf der Werbeflächen 210 €
Verkaufspreis: 3,50 €

Berechne den Break-even-Point (siehe Exkurs auf Seite 146).

zu 5.2 Aufgabe 9
zu 5.5 Aufgabe 8

Forschungsaufgaben

6 Stuhlproduktion – Kosten, Umsatz und Gewinn

Eine Möbelfirma stellt Stühle her. Die Produktionskosten hängen davon ab, wie viele Stühle pro Tag produziert werden. Die für Berechnungen zuständige Abteilung hat folgende Vorschrift für die Zuordnung *produzierte Stückzahl* → *Kosten* gefunden: $K(x) = 35 \cdot x + 20$ (x in 100 Stück, y in 100 Euro). Ein Stuhl soll für 45 € verkauft werden.

Interpretiere die Kostenfunktion $K(x)$. Begründe, dass $U(x) = 45x$ eine passende Funktion für den Umsatz $U(x)$ und $G(x) = U(x) - K(x)$ den Gewinn in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl beschreibt. Wann macht die Firma Gewinn? Berechne.

Wie hoch muss der Verkaufspreis mindestens sein, damit ein Gewinn möglich wird?

Was ändert sich, wenn die Fixkosten bei der Produktion sich auf 5000 € erhöhen?

Was ändert sich, wenn die Kosten pro 100 produzierter Stühle sich ohne Fixkosten auf 4000 € erhöhen?

Klasse 9

14 Stühle

Eine Möbelfirma stellt u. a. Stühle her. Die Produktionskosten hängen davon ab, wie viele Stühle pro Tag produziert werden. Die für Berechnungen zuständige Abteilung hat folgende Funktion für die Kosten in Abhängigkeit der produzierten Anzahl an Stühlen gefunden:
$K(x) = 15x^2 + 20$ (x in 100 Stück, y in 100 Euro)

a) • Ein Stuhl soll für 45 € verkauft werden. Begründe, dass der Umsatz durch $U(x) = 45x$ ($U(x)$ in 100 €) passend beschrieben werden kann und der Gewinn in Abhängigkeit der produzierten Anzahl an Stühlen durch $G(x) = U(x) - K(x)$.
• Wie viele Stühle müssen produziert werden, damit die Firma Gewinn macht? Wie hoch ist der maximal mögliche Gewinn?

b) Vergleiche mit der Modellierung der Kosten durch $K(x) = 35x + 20$.

15 Parfüm

Je teurer ein Produkt verkauft wird, desto weniger kann abgesetzt werden. Welchen Preis sollte eine Firma ansetzen? Für den Absatz eines exklusiven Parfüms modelliert ein Team die Preis-Absatz-Funktion für Packungspreise bis 200 € mit $P(x) = -50x + 10\,000$ (x: Packungspreis; y: absetzbare Packungsanzahl)

a) Skizziere P und beschreibe, wie sich die Absatzzahlen in Abhängigkeit des Stückpreises entwickeln. Gib ein sinnvollen Bereich für x an.

b) Begründe, dass $U(x) = x \cdot P(x)$ der Umsatz berechnet werden kann. Skizziere in ein neues Koordinatensystem U und beschreibe die Umsatzentwicklung. Welcher Packungs-preis ermöglicht den größten Umsatz?

c) Was ändert sich an der Umsatzentwicklung, wenn die Preis-Absatzfunktion mit
(1) $P(x) = -70x + 10\,000$ (2) $P(x) = -25x + 10\,000$ (3) $P(x) = -200x + 20\,000$
modelliert wird?

Klasse 11

Aufgaben

1 Ein neuer Kopfhörer

Die Firma Gutklang hat in einer Betriebsprüfung Produktionskosten zur Herstellung eines neuen Kopfhörers in Abhängigkeit von der Tagesproduktion erfasst. Dabei wurden bis zu einer Produktion von 8000 Stück folgende Beobachtungen festgehalten:

Wenn nichts produziert wird, fallen trotzdem Produktionskosten in einer bestimmten Höhe K_0 an.	Die Kosten nehmen mit der produzierten Stückzahl zu.	Die Zunahme der Kosten wird bis zu einer bestimmten Stückzahl x_1 ständig kleiner, ab dann nimmt sie wieder immer mehr zu.

a) Skizzieren Sie den Graphen einer Kostenfunktion K, der die Beobachtungen gültig erfasst. Begründen Sie Ihre Wahl auch mit den zugehörigen Graphen der „Kostenänderung“ und der „Änderung der Kostenänderung“.

Realität -> Realmodell

b) Die Kostenfunktion

K: produzierte Stückzahl (in Tausend) → entstehende Kosten (in 1000 €)
wurde im Intervall [0; 8] mit $K(x) = 2x^3 - 18x^2 + 60x + 32$ modelliert.

- Was kostet die Tagesproduktion von 1000 Kopfhörern, was die von 5000?
- Erstellen Sie eine aussagekräftige Skizze zu K. Passt diese Funktion zu den obigen Beobachtungen? Welche Bedeutung hat der Wendepunkt?
- Welche Bedeutung hat die lokale Änderungsrate im Sachkontext? Bestimmen Sie diese für die Stückzahlen 0 und 8000.

c) Der Kopfhörer soll für 35 € verkauft werden. Macht die Firma immer einen Gewinn oder hängt das von der verkauften Menge ab?
Begründen Sie, dass $U(x) = 35x$ die Umsatzfunktion und $G(x) = U(x) - K(x)$ die Gewinnfunktion ist.

- Bei welcher verkauften Menge wird der größte Gewinn erzielt?

Mathematisches Modell -> Mathematische Auswertung

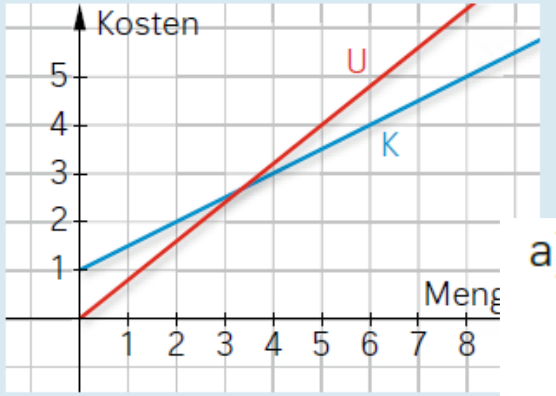
d) Was ist bei der Berechnung des möglichen Gewinns in c) nicht berücksichtigt worden? Wo fallen weitere Kosten an? Was wird stillschweigend vorausgesetzt?

Modell -> Realität (Validierung)

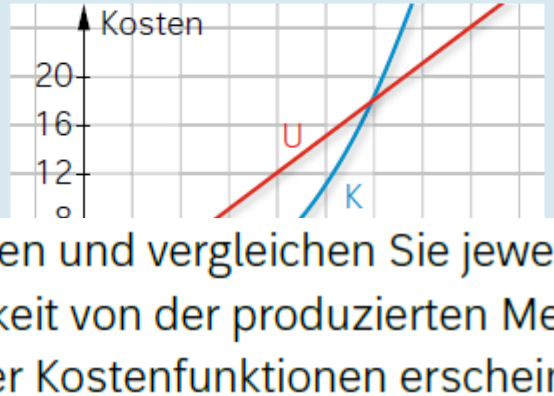
3 Kosten, Umsatz und Gewinn

Produktionskosten können auf unterschiedliche Weise entstehen. Entsprechend werden sie durch unterschiedliche Funktionen modelliert.

(1) $K(x) = 0{,}5x + 1;\ U(x) = 0{,}8x$



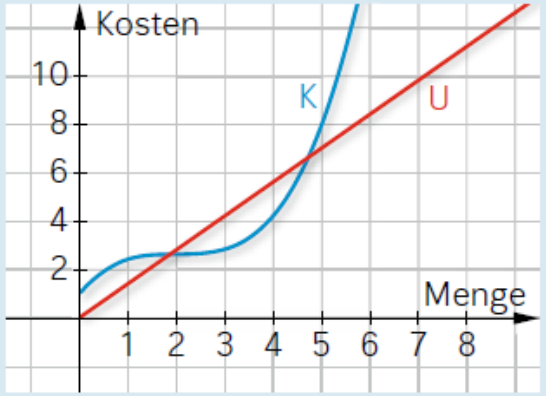
(2) $K(x) = 0{,}01x^3 + 1;\ U(x) = 1{,}5x$

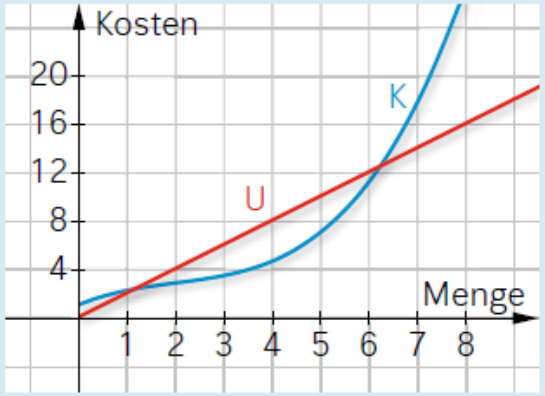


a) Beschreiben und vergleichen Sie jeweils die Entwicklung der Produktionskosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge.
Welche der Kostenfunktionen erscheinen Ihnen sinnvoll? Begründen Sie.

b) Ermitteln Sie zu den Kosten- und Umsatzfunktionen den Gewinnbereich und den maximalen Gewinn.

(3) $K(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 2{,}4x +$
$U(x) = 1{,}4x$

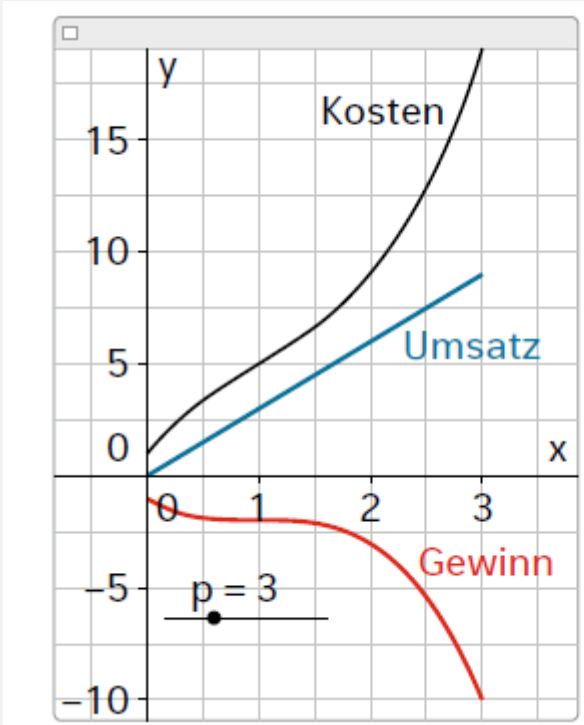


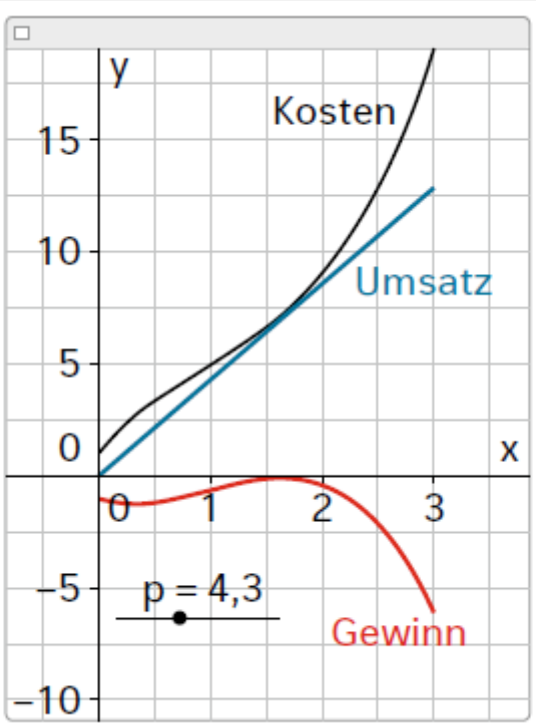


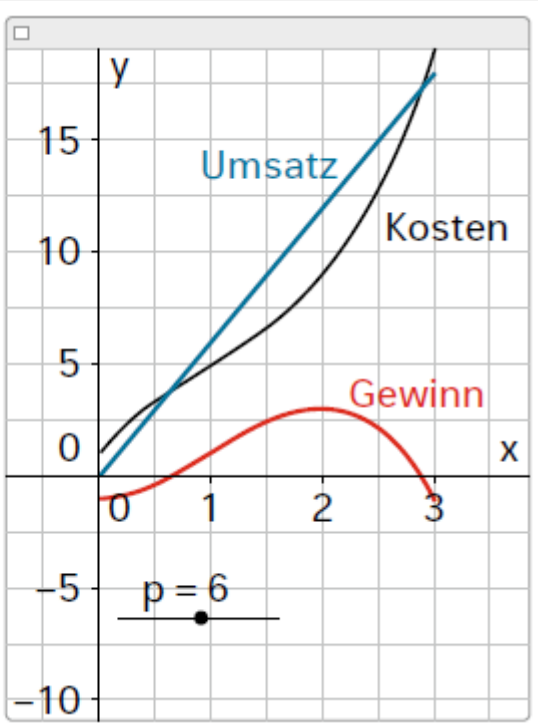
Eine Möbelfirma stellt u. a. Stühle her.
Die Produktionskosten K hängen von der an einem Tag produzierten Menge x ab.
Es werden maximal 300 Stühle produziert.
In betriebsinternen Untersuchungen wurde folgende Kostenfunktion entwickelt:

$K(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$

x in Hundert Stück,
K (x) in Zehntausend Euro.


y
Kosten
15
10
Umsatz
5
0
x
0
1
2
3
Gewinn
p = 3
−5
−10


y
Kosten
15
10
Umsatz
5
0
x
0
1
2
3
p = 4,3
Gewinn
−5
−10


y
15
Umsatz
Kosten
10
5
Gewinn
0
x
0
1
2
3
p = 6
−5
−10

Der Betriebschef möchte wissen, für welche Produktionsmenge bei verschiedenen Verkaufspreisen jeweils der höchste Gewinn erzielt wird und für welche Produktionsmenge der Gewinn am stärksten zunimmt. Übertragen Sie die Tabelle und füllen Sie sie aus.

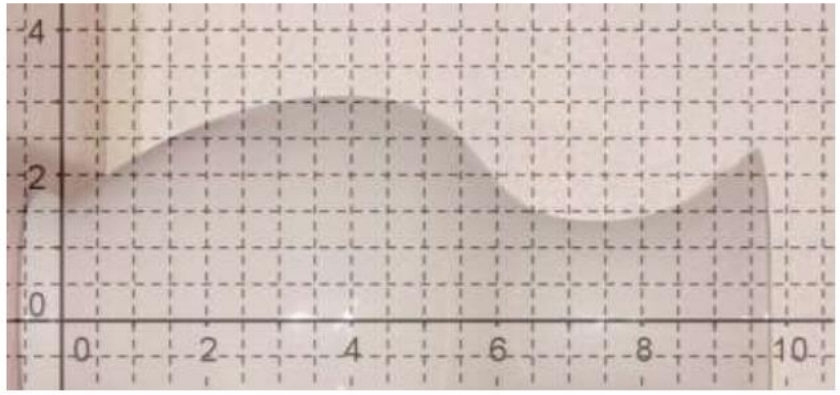
Verkaufspreis	Gewinnzone (Anzahl verkaufter Stühle)	maximaler Gewinn	stärkste Gewinnzunahme
300			
450			
600			
700			
p			

Erstellen Sie abschließend eine Expertise für den Betriebschef.

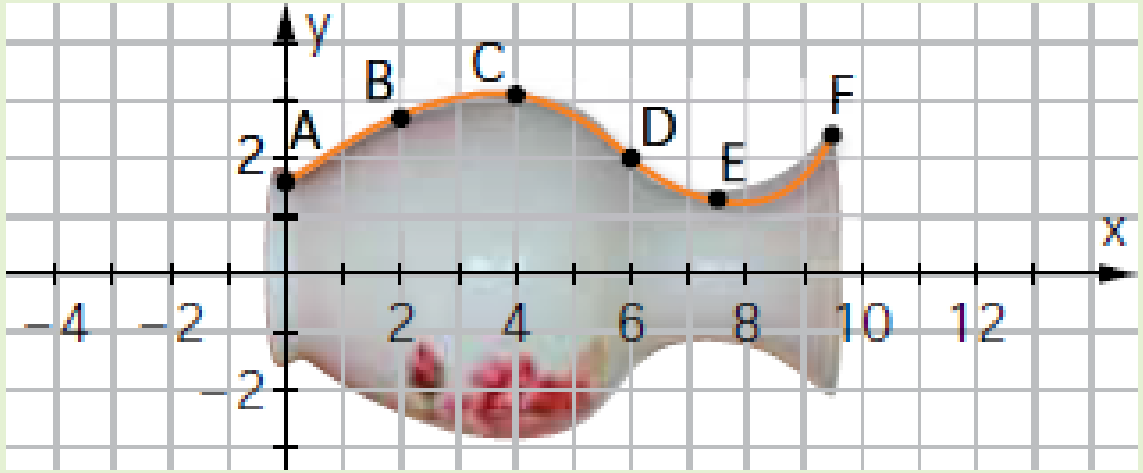
In der Expertise sollte enthalten sein:

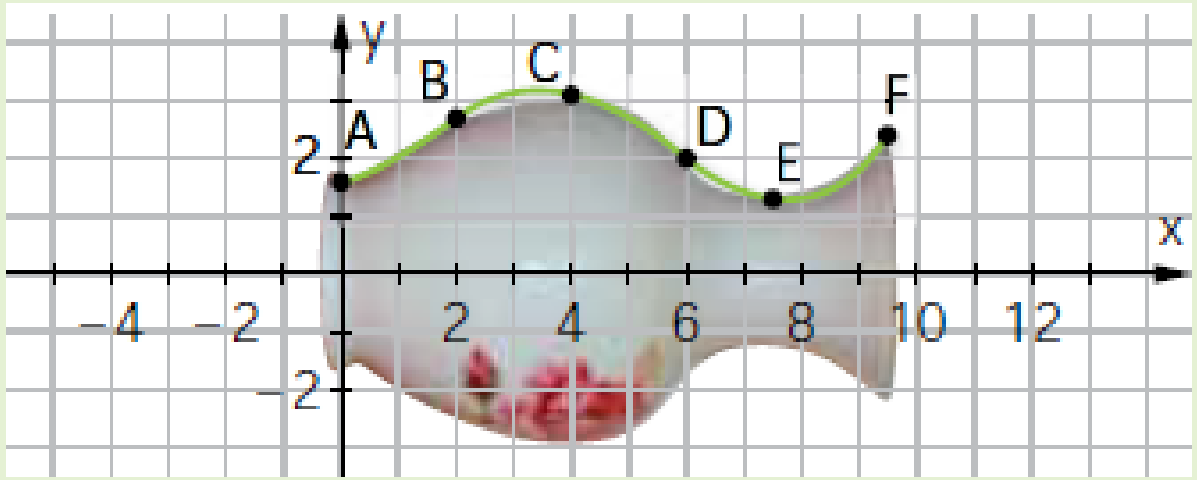
- Empfehlung für Produktionsmengen
- mögliche Gewinne
- Was können die Berechnungen nicht berücksichtigen?
- Unter welchen Voraussetzungen kann es die Gewinne nur geben?

LK/GK

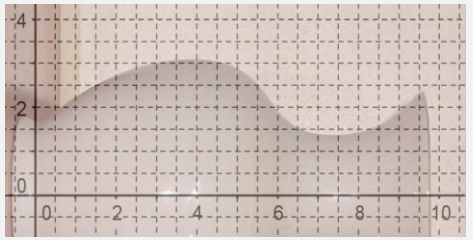


Wanted: Passende Modellierung der Vasenform





Was nun?
Neue Ideen braucht das Land:



(A) Laurin:
Besondere Punkte auslesen (Extrempunkte, Wendepunkte)

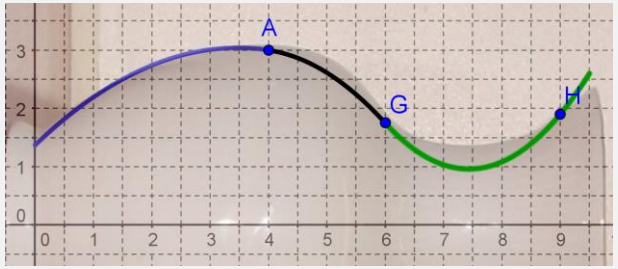
(B) Ellen:
Form aus Stücken einfacher Funktionen zusammensetzen

Beide Ideen liefern in Teilen bessere Ergebnisse als Interpolationspolynome, überzeugen aber nicht richtig.

(1) Bei Hinzunahme weiterer Bedingungen für eine bessere Passung erhöht sich der Grad der Polynome, man hat wieder das Problem der Interpolationspolynome, abgesehen vom hohen Rechen- und „Tipp"aufwand (Polynom vom Grad 7: 7 Zeilen und 8 Spalten, also 56 Einträge).

(2) Knickfreiheit kann Problem sein, wenn man Ableitung nicht kennt. Passung im weiteren Verlauf auch nicht zwingend gut.

Neue Ideen?



(C) Magali:
Man könnte bei (2) ja statt Parabeln Polynome vom Grad 3 oder 4 nehmen, dann kann man mehr berücksichtigen, weil man mehr Bedingungen benutzen kann (mehr Parameter vorhanden).

Körner: Das ist eine sehr gute Idee…

In den meisten Fällen gibt es nicht eine einzige Funktion, die gut zu der vorgegebenen Form passt. Wenn es nicht gelingt, eine passende Funktion für eine gegebene Form zu finden, ist eine abschnittsweise Modellierung oft erfolgreich.

Strategie:

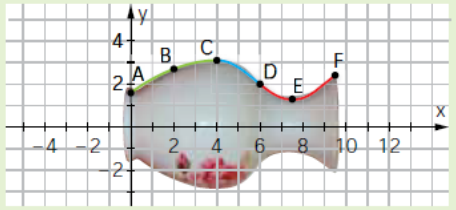
- Unterteilen Sie die Form in Abschnitte.
- Notieren Sie die Bedingungen, die erfüllt sein müssen.
- Wählen Sie für jeden Abschnitt eine ganzrationale Funktion mit passendem Grad.
- Eine gute Strategie bleibt das Auslesen charakteristischer Punkte.

b) Modellieren Sie die Form der Vase. Hinweis: Die Form hat keine Knicke.
Beispiel:

(1) A, B, C,
C Hochpunkt
- 4 Bedingungen/ Grad 3

(2) C, D,
C Hochpunkt, D Wendepunkt
- 4 Bedingungen/ Grad 3

(3) D, E, F,
D Wendepunkt, E Tiefpunkt
- 5 Bedingungen/ Grad 4



$$v(x)=\begin{cases} -0{,}0031x^3-0{,}069x^2+0{,}7x+1{,}6 & ;\ 0\le x\le 4\\ 0{,}069x^3-1{,}24x^2+6{,}6x-7{,}9 & ;\ 4\le x\le 6\\ 0{,}027x^4+0{,}81x^3-8{,}75x^2+40{,}15x-63{,}74 & ;\ 6\le x\le 9{,}5 \end{cases}$$

4 Die Vase – revisited

Die Modellierung von Formen mit mehreren abschnittsweise definierten Funktionen liefert meist bessere Modelle als die Verwendung einer einzigen Funktion. Allerdings ist man zunächst auf eine geeignete Wahl von Bedingungen und Funktionstypen angewiesen, man weiß auch kaum im Vorhinein, ob das Modell gut passt. Ein weiterführendes Ziel ist daher eine mechanisch reproduzierbare systematische Modellierung, ein einheitlicher Algorithmus.

Idee: Systematisch mit Parabeln von links nach rechts modellieren. Man benötigt jeweils drei Bedingungen (Punkte A, B, C, D, E,... ausgelesen):

1. Parabel durch A, B und C
2. Parabel durch C und D, knickfreier Anschluss in C.
3. Parabel durch D und E, knickfreier Anschluss in D...

Modellieren Sie die Vase aus Aufgabe 1 abschnittsweise mit Parabeln. Beurteilen Sie das Modell. Dieser Modelltyp heißt *Quadratischer Spline*.

7 Die Vase – re-revisited

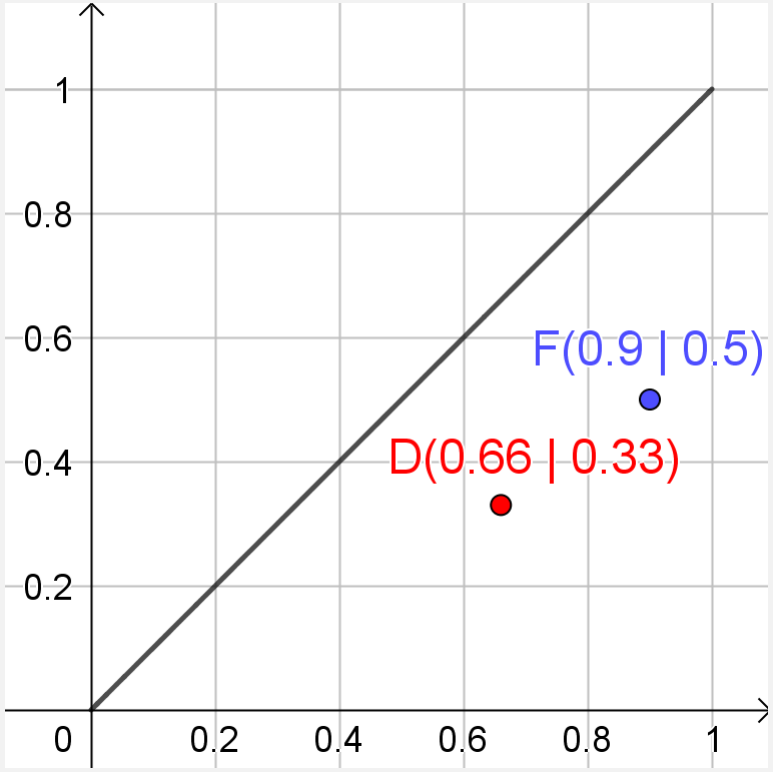
Da Parabeln keine Wendepunkte haben, also immer nur ein Krümmungsverhalten (links oder rechts), passen quadratische Splines (vgl. Aufgabe 4) schlecht, wenn zwischen zwei ausgelesenen Punkten die vorliegende Kurve ihr Krümmungsverhalten ändert. Man müsste dann auf jeden Fall mögliche Wendepunkte auslesen. Um darauf nicht angewiesen zu sein, ersetzt man die quadratischen Funktionen durch Polynome vom Grad 3. Entsprechend fordert man die Übereinstimmung der Übergänge auch in der zweiten Ableitung (Krümmungsverhalten).

Jeweils zwei benachbarte Punkte werden jetzt durch ganzrationale Funktionen 3. Grades sprungfrei, knickfrei und mit gleichem Krümmungsverhalten in den Stützpunkten verbunden.

Frankreich: 90% der Einwohner besitzen 50% des Einkommens

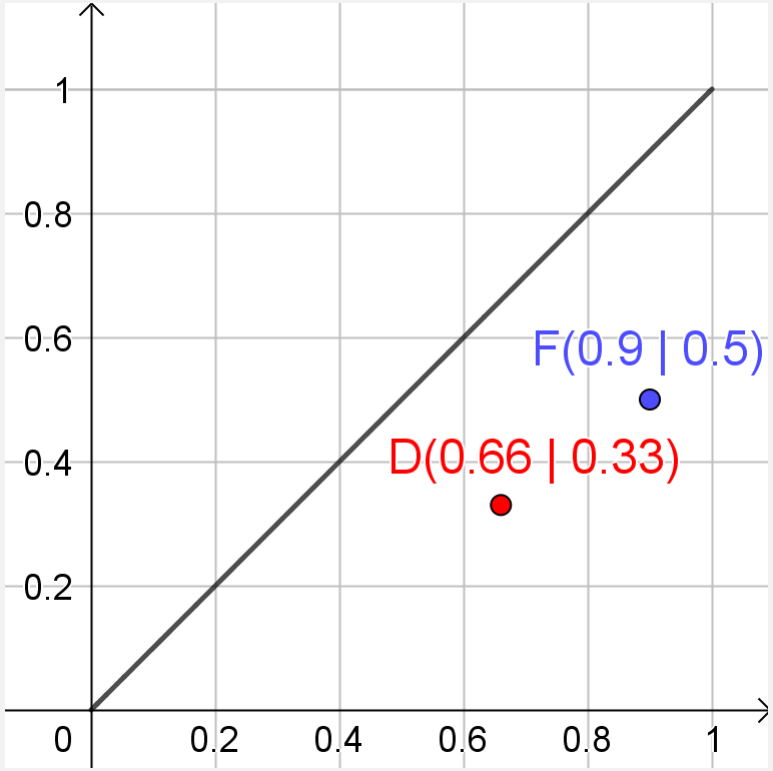
Deutschland: 66% besitzen 33% des Einkommens

In welchem Land ist das Vermögen gerechter verteilt?



Modell 1: *Nick*: $\frac{\text{Anteil Einkommen}}{\text{Anteil Bevölkerung}}$

D: $\frac{0,33}{0,66} = 0,5$ F: $\frac{0,50}{0,90} = 0,55$



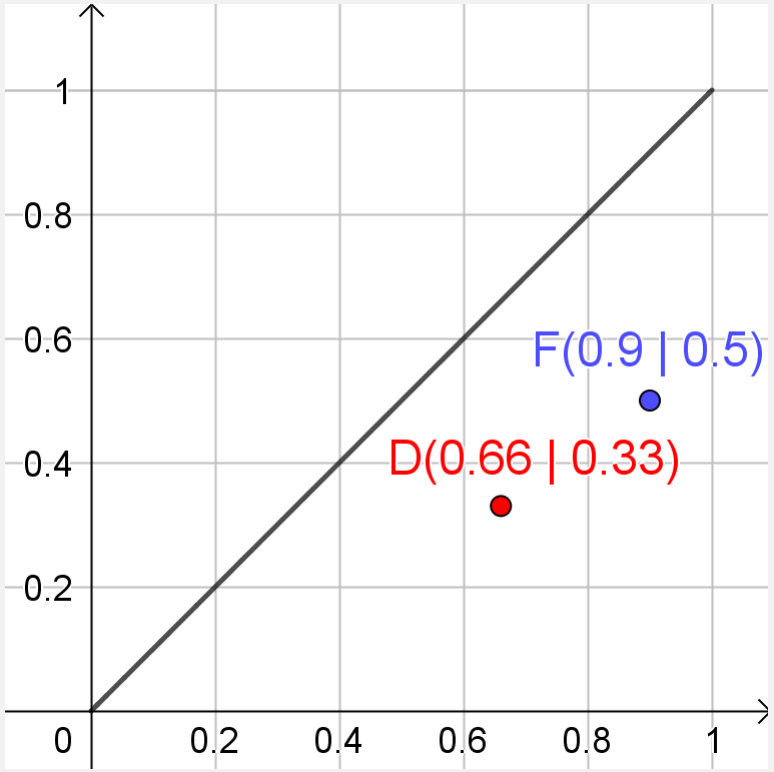
Kritik:
Wenn zusätzliche Information, z.B.:
30% der Deutschen besitzen 10%, dann:
$\frac{0,10}{0,30} = 0,333$

Modell 2: *Jonathan*: Mittelwert der Daten

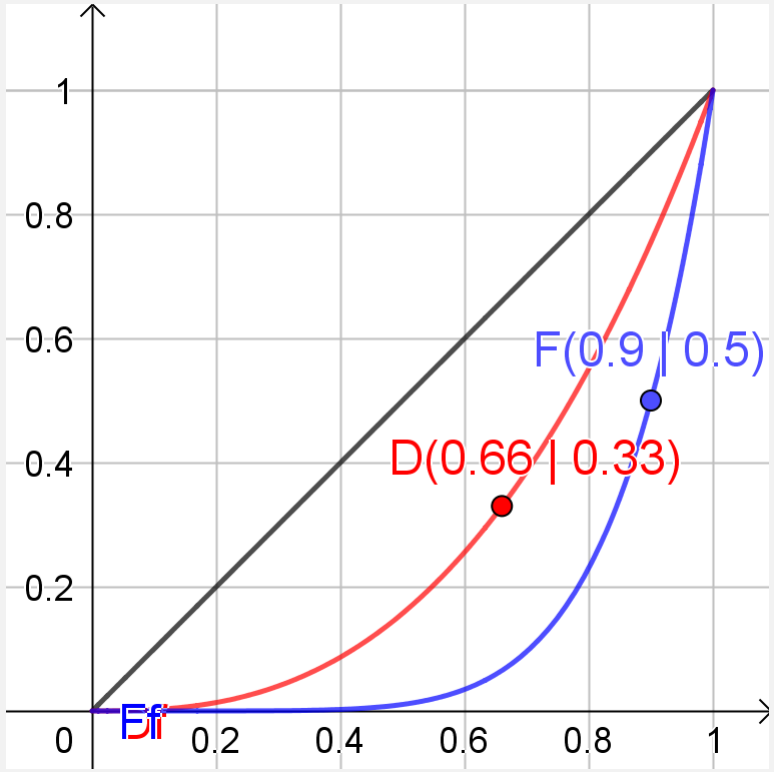
Modell 3: *Pia*: Funktion zu Daten finden,
Fläche zwischen Funktion und $y = x$

Es wird mit (0|0) und Messwert Potenzfunktion $f(x) = x^r$ bestimmt:

$D(x) = x^{2,67}$, $F(x) = x^{6,58}$



Modell 4: *Nadine*: Grad der Funktion



	Pia	*Nadine*
Deutschland	$\int_0^1 x - x^{2,67} dx = 0,23$	$L(x) = x^{2,67}$
Frankreich	$\int_0^1 x - x^{6,58} dx = 0,37$	$L(x) = x^{6,58}$

Modell 3: Fläche zwischen Kurve und y=x

Modell 4: Grad der Potenzfunktion

10% besitzen	20%	30%	50%	70%	90%
Modell 3	0,09	0,16	0,27	0,37	0,46
Modell 4	1,43	1,91	3,32	6,45	21,85

- M3 ist anschaulicher.

- Ein Nachteil von M4 ist, dass der Wert für größer werdende Ungerechtigkeit gegen Unendlich strebt.

- M4 ist einfacher, weil man zuerst die Funktion bestimmt und damit das charakterisierende *k*.
  Erst danach kann die Fläche ermittelt werden.

- M3 ist aufwändiger und setzt mehr Mathematik voraus (Integral).

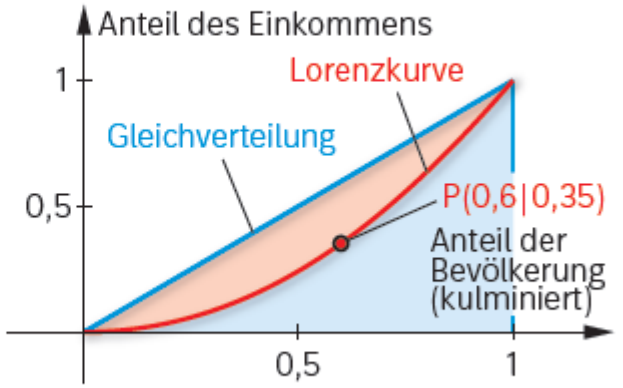
- Ein qualitativer Unterschied liegt darin, dass M3 für jede Funktion, die zu den Daten passt, verwendet werden kann; bei M4 ist man auf das Modell „Potenzfunktion“ angewiesen. M3 ist damit universeller.

Exkurs

Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

Wie ist das Einkommen oder das Vermögen in der Bevölkerung eines Landes verteilt? Wie kann man z.B. entscheiden, ob das Vermögen in einem Land gerechter verteilt ist als in einem anderen? Solche Fragen sind für Wirtschaftsfachleute und Politiker bedeutsam. Die beiden Statistiker MAX OTTO LORENZ und CORRADO GINI haben dazu ein Modell entwickelt, das in den Sozialwissenschaften häufig benutzt wird. Dazu wird eine Funktion L(x) konstruiert (Lorenzkurve), die den Zusammenhang zwischen dem Bevölkerungsanteil (x-Achse) und dem Anteil am Einkommen (y-Achse) beschreibt. Der Punkt P gehört zu der Information: 60% der Bevölkerung besitzen 35% des verfügbaren Einkommens. Das blaue Geradenstück ist auch eine Lorenzkurve. Sie stellt die gleichmäßige Verteilung des Einkommens in der Bevölkerung dar. Ein Maß für die Stärke der Abweichung der konkreten Einkommensverteilung von der gleichmäßigen Verteilung ist der Gini-Koeffizient G: Er wird definiert als das Doppelte des Inhalts der Fläche zwischen der blauen und der roten Kurve, also:

$$G = 2 \cdot \int_0^1 (x - L(x))\,dx$$



Und nun haben Sie sich
eine Tasse Kaffee verdient...

Vielen Dank!

hen.koerner@t-online.de