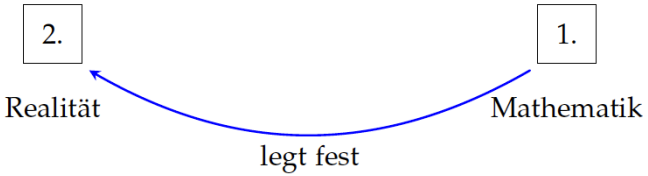
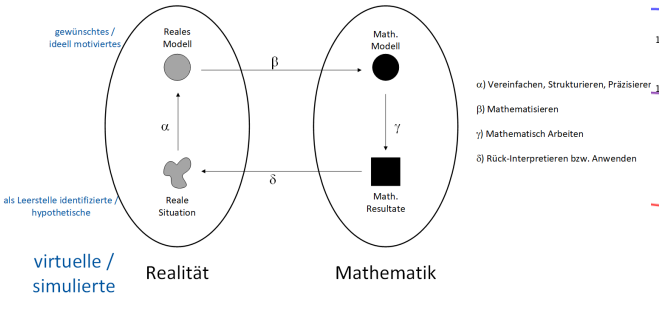
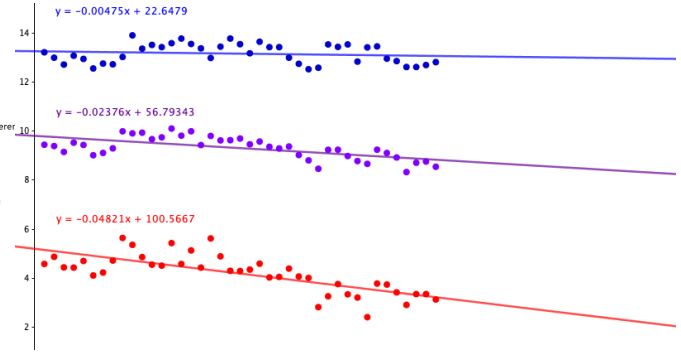




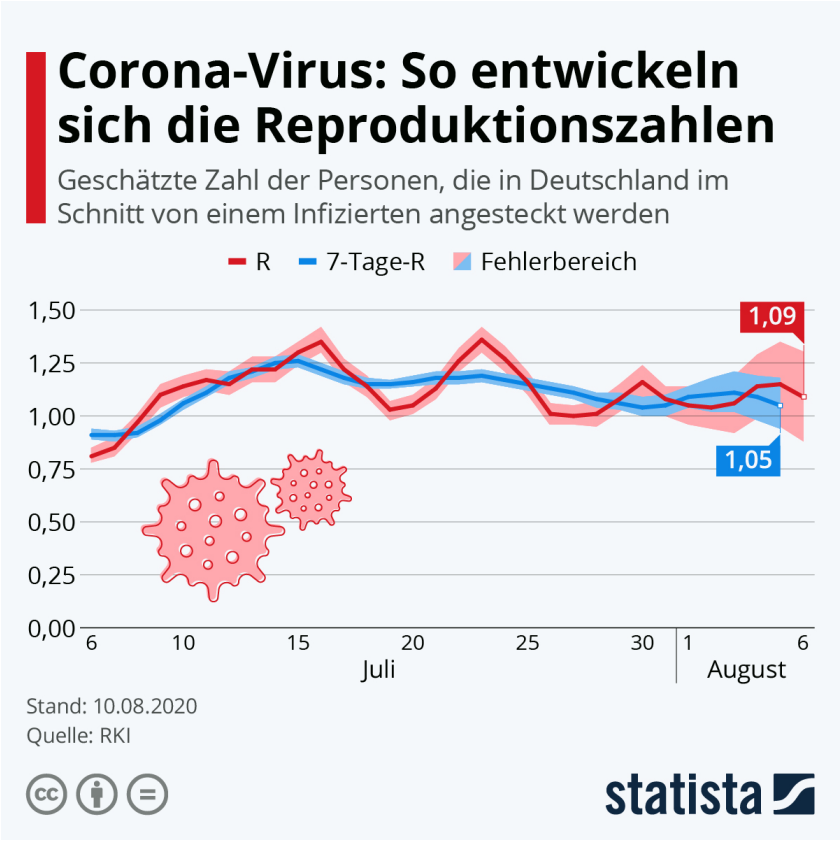


MENSCH MACHT MATHEMATIK – MODELLIERUNGSKOMPETENZEN MIT KONKRETEN BEISPIELEN ABRUNDEN

MNU Herbsttagung 2021 des MNU Landesverbandes Nordrhein

Stefan Pohlkamp

14. September 2021



CC BY SA M. Janson, statista

- Verdopplungszahl
- 7-Tage-Inzidenz
- Hospitalisierungsinzidenz

„Man kann nicht immer neue Grenzwerte erfinden“
(Armin Laschet, 15.02.21)

Ziel: Pandemie mathematisch beschreiben (deskriptiv)
Mittel: Modellierung verschiedener Kennzahlen (normativ)

GLIEDERUNG

I. Deskriptive vs. normative Modellierung im Lehrplan

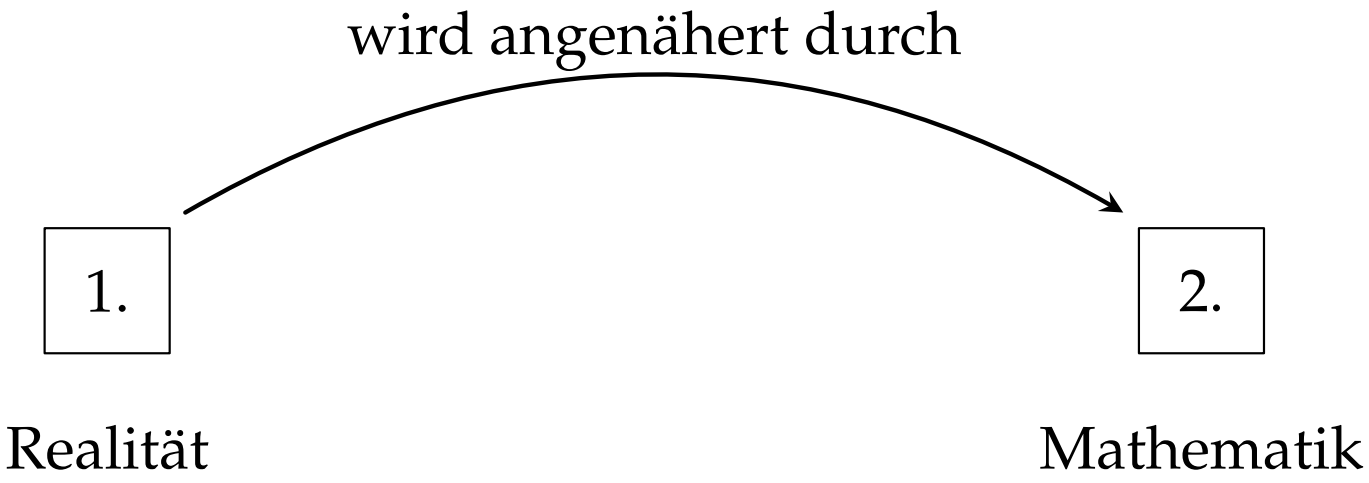
II. Blick in die Materialien

III. Bündelung und Diskussion

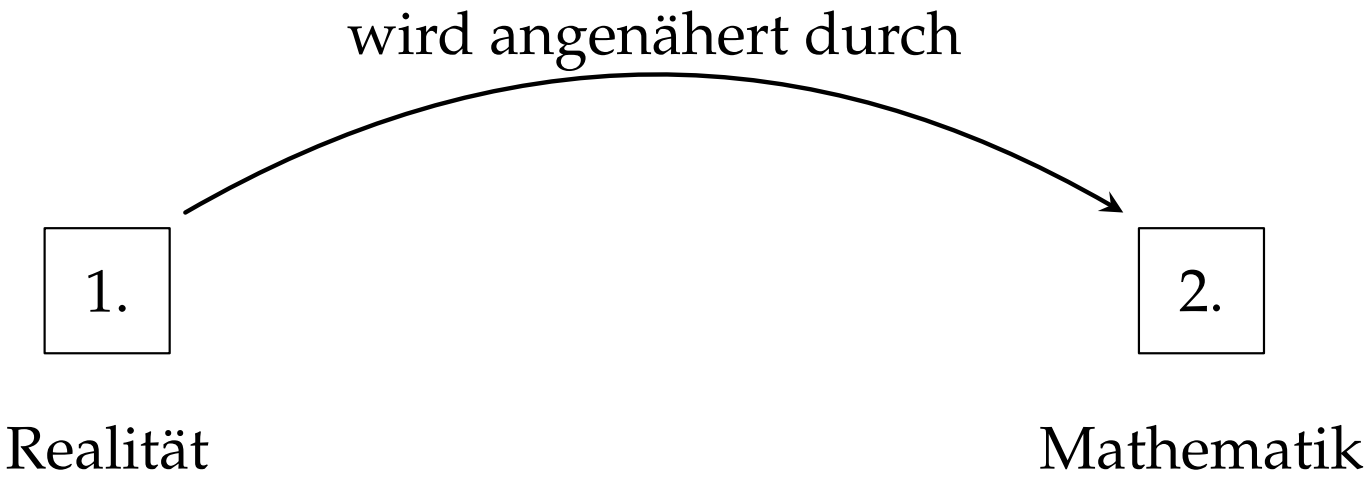
Modellierung in Lehrplänen: mehrheitlich

- Mecklenburg-Vorpommern:
  „die Kompetenz, die Wirklichkeit mit mathematischen Mitteln zu beschreiben (Modellieren)“ (Bildungsministerium Mecklenburg-Vorpommern 2015, S. 3)
- Österreich:
  „Darstellend-modellierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik zu tun haben. “ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2019)

Deskriptive Modellierung



Deskriptive Modellierung

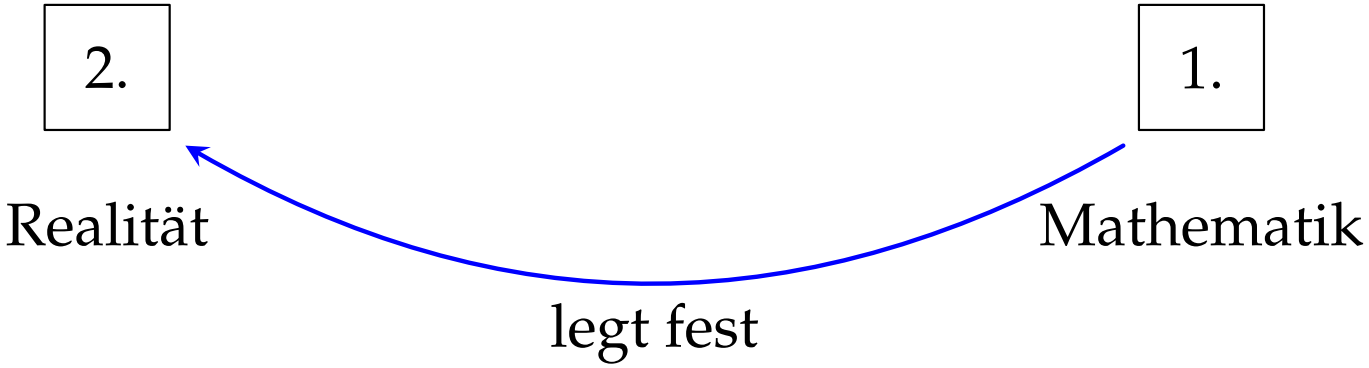


- beschreiben
- erklären
- vorhersagen

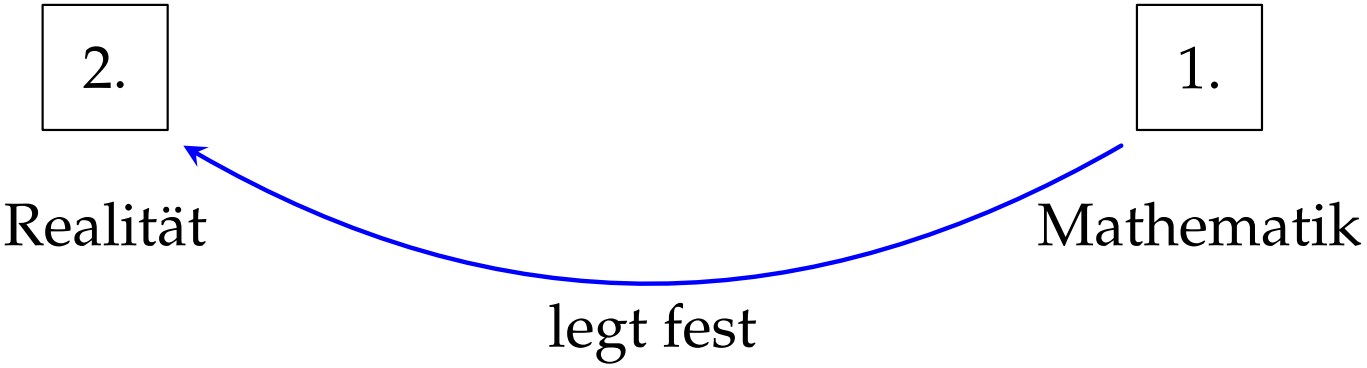
Modellierung in Lehrplänen: Ausnahme

- Bremen:
  „identifizieren und interpretieren mathematische Modelle hinsichtlich ihrer Funktionen z.B. zu erklären, zu beschreiben, **vorzuschreiben.**“ (Bildungssenatorin Bremen 2008, S. 14, Herv. d. Verf.)

Normative Modellierung



Normative Modellierung



- vorschreiben [präskriptiv]

Präsenz und Relevanz im Alltag

- Wahlrechtsreform:
  Sitzverteilungsverfahren, außermathematische Modellierungsentscheidungen
- Definition von Armut und Grundsicherung
- Diskussion um Maximalwerte:
  z. B. Feinstaub und Stickoxide

Eid für Finanzmodellierende

Derman / Wilmott 2009, S. 2

- I will remember that I didn't make the world, and it doesn't satisfy my equations.
- Though I will use models boldly to estimate value, I will not be overly impressed by mathematics.
- I will never sacrifice reality for elegance without explaining why I have done so.
- Nor will I give the people who use my model false comfort about its accuracy. Instead, I will make explicit its assumptions and oversights.
- I understand that my work may have enormous effects on society and the economy, many of them beyond my comprehension.

Modellierung in Lehrplänen: Differenzierung?

- NRW:
  „Um reale Situationen mathematisch zu erfassen und damit Fragestellungen zu beantworten, wird der Prozess des mathematischen Modellierens in mehreren Teilschritten durchlaufen.“ (Schulministerium NRW 2019, S. 14)

- „Schülerinnen und Schüler nutzen Mathematik als Werkzeug zum Erfassen von Phänomenen der realen Welt“ (Schulministerium NRW 2007, S. 14)

NORMATIV VS. DESKRIPTIV: DIFFERENZIERUNG?

„**Normative Modelle erkennen**
Beurteile jeweils kurz, ob nötige Modelle normativ sind oder nicht.

(a) Festlegung der Eintrittspreise für ein Freibad

(b) Temperaturabnahme von heißem Tee in einer Tasse

...

(e) Anzahl Zeilen auf einer Buchseite“

(BRUDER ET AL. 2017, S. 50)

Differenzierung: Prototypen vs. Mischformen

normativ vs. deskriptiv: abstrahierte Kategorien

Feinstaubmessung:
Höhe/Entfernung von Messgerät als normative Entscheidung

Einkommensteuer:
Einkommensverteilung als deskriptive Referenz

DIFFERENZIERUNG: MODELL VS. MODELLIERUNG

„Normativ und deskriptiv sind Eigenschaften der Modellbildung und hängen davon ab, welche Rolle das Modell in einem Problemlöseprozess spielt.“ (MARXER / WITTMANN 2009, S. 11)

Einkommensteuer

- normativ aus Sicht der gesetzgebenden Instanz
- deskriptiv aus Sicht der Steuerzahler:innen

$\Rightarrow$ Modellierung ist normativ, nicht Modell

Taxikosten teilen

nach Sjuts 2009

CC BY-SA 2.0 Christoph Scholz (flickr.com)

Mara bestellt ein Taxi für die Fahrt von ihrer Wohnung zum Bahnhof und zahlt den Stadttarif von 12 EUR. Nach der Hälfte der Strecke steigt ihre Freundin Nele zu. Wie viel sollte Nele ihrer Freundin zahlen?

Mögliche Lösungen

Mara	Nele	
12 EUR	0 EUR	Mara hat das Taxi bestellt.
9 EUR	3 EUR	Mara und Nele teilen sich die 2. Hälfte der Fahrt.
8 EUR	4 EUR	Mara fährt doppelt so weit.
6 EUR	6 EUR	Der Stadttarif ist unabhängig von der Entfernung.

UNTERRICHTSVORSCHLÄGE: BEISPIEL

MARXER / PREDIGER / SCHNELL 2010, S. 20

Wie verteilen wir die Müllgebühr?

Wie verteilen wir die 750 € Müllgebühr auf fünf Haushalte mit elf Erwachsenen und vier Kindern?

Bestehende Materialien

- LEMAMOP (Bruder et al. 2017):
  Materialien für 9. Klasse
- Verteilung von Geflüchteten auf Bundesländer (Königsteiner Schlüssel) (Bracke / Vorhölter 2018)
- Murmelspiel (Büchter / Müller 2006):
  Spielregeln
- Eintrittspreise (Marxer / Wittmann 2009):
  Aufstellung von Gleichungen und Termen

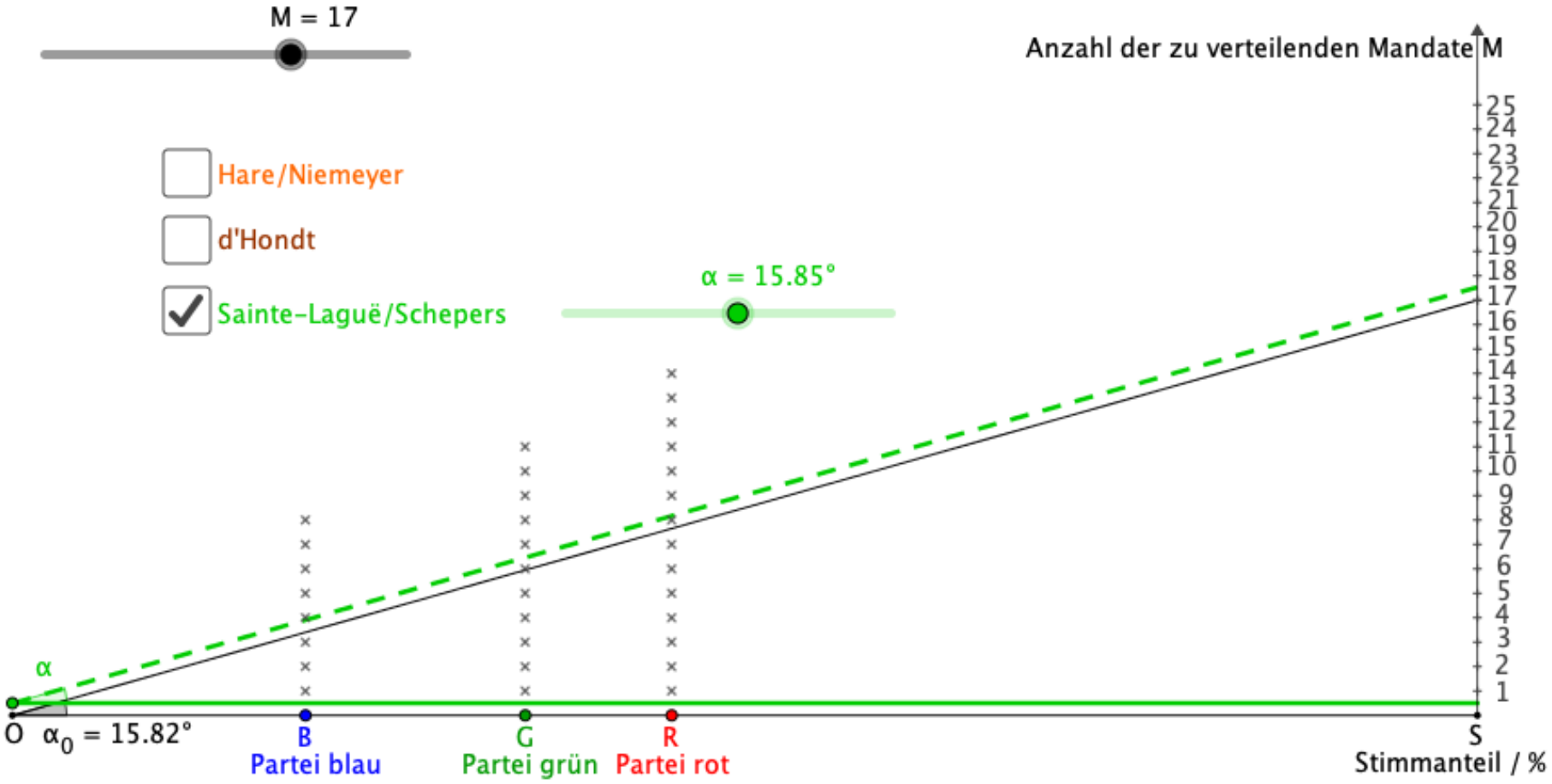
Entwickelte Materialien zur Ansicht

1. Normative Modellierung *per excellence*: Verhältniswahl am Strahlensatz
2. Variation normativ gesetzter Parameter in einem Modell: Grundfreibetrag zur Einkommensteuer
3. Normative Elemente in einer deskriptiven Modellierung: Entwicklung des Arktis-Eises mit authentischen Daten

https://rwth-aachen.sciebo.de/s/gKzuWMjvRkS3ltW

Vergleich mit Strahlensatz

Pohlkamp / Heitzer 2020, S. 220



Ausgewählte Parteien der Europawahl 2019

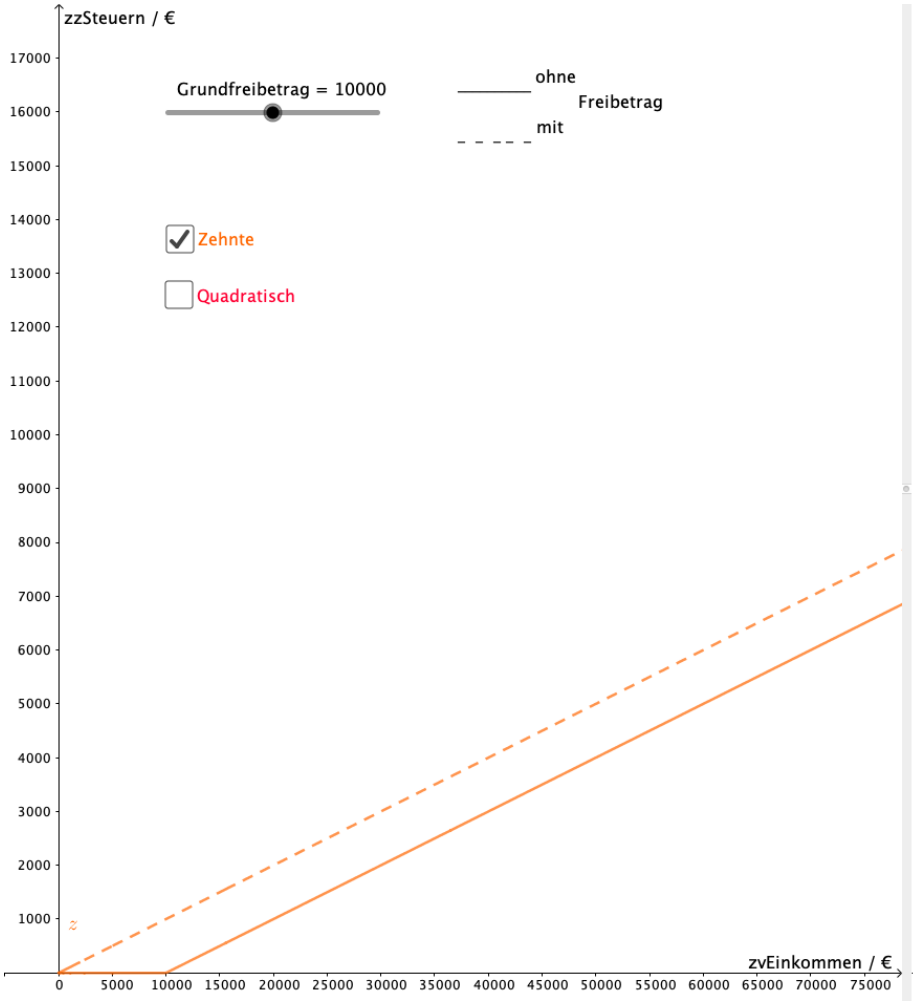
Der Bundeswahlleiter 2019

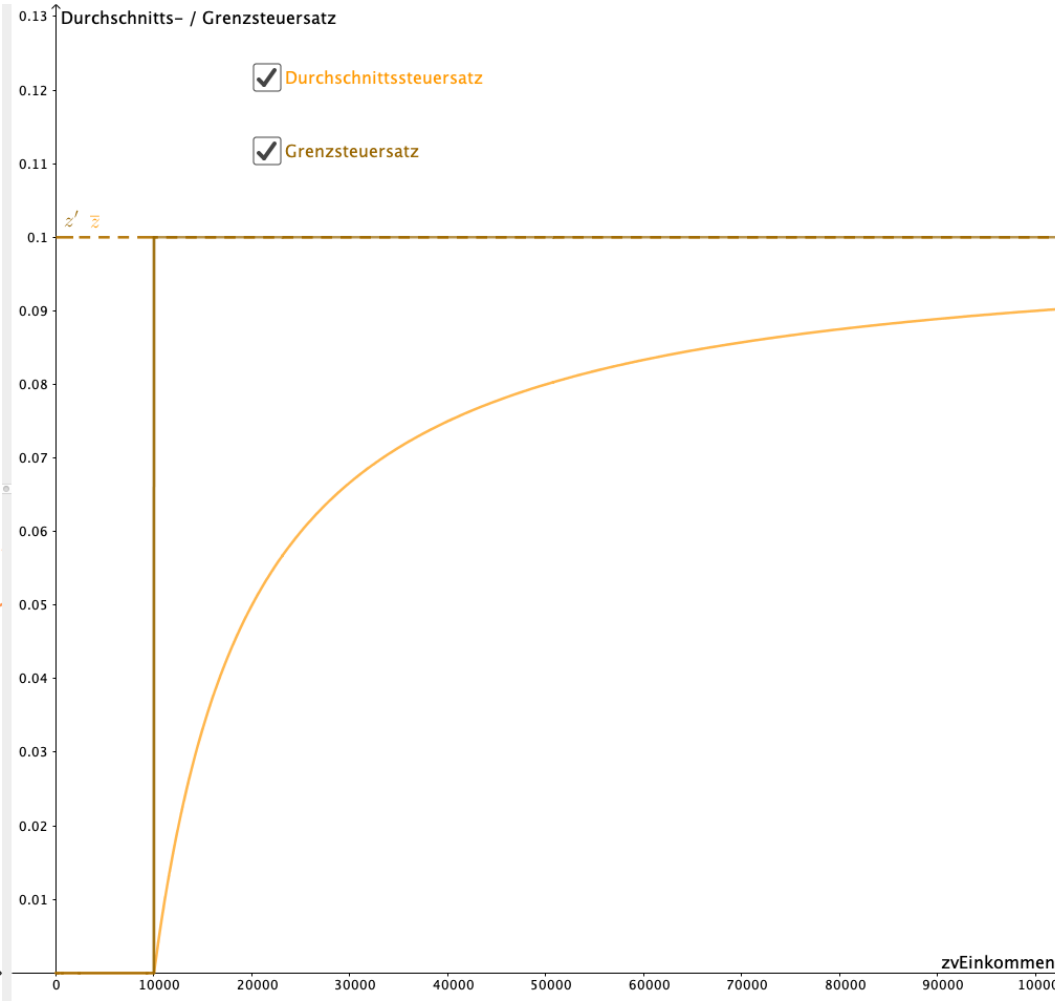
Partei	Stimmen	Sitzanspruch	Mandate
CSU	2.355.067	6,297	6
PARTEI	899.079	2,404	2
TIERSCHUTZ	542.226	1,450	1
PIRATEN	243.302	0,651	1

Die Schüler:innen

- stellen prototypische Eigenschaften normativer Modellierung – nicht eindeutig, interessengeleitet und aushandlungsbedürftig – dar.
- vergleichen verschiedene normative Modellierungen zur gleichen Fragestellung hinsichtlich ihrer „mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur“ (WINTER 1989, S. 46).

EINKOMMENSTEUER

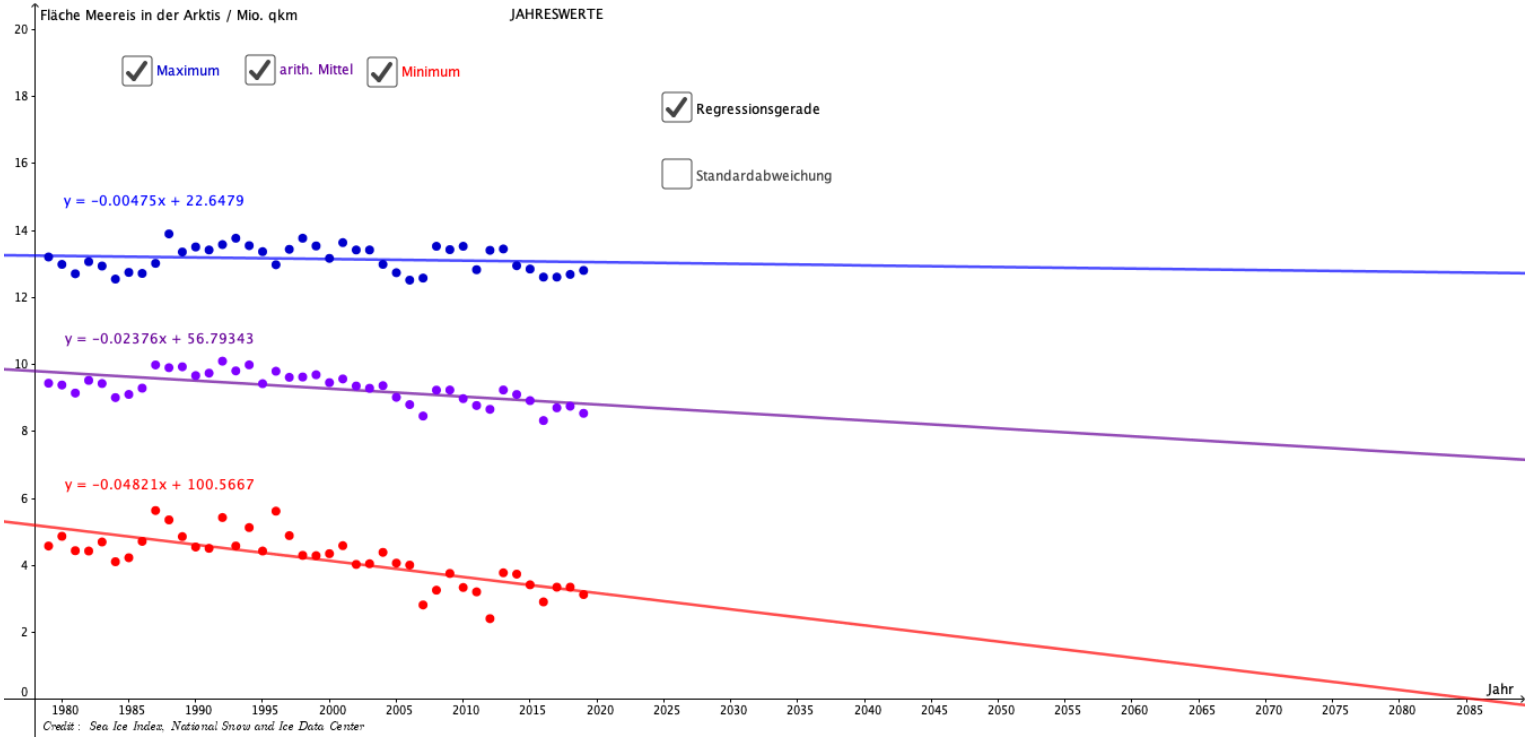




Die Schüler:innen

- identifizieren Annahmen, Festlegungen und Alternativen bei normativen Modellierungen.
- reflektieren Möglichkeiten, normative Modellierungen zu bewerten, und die Bedeutung einer solchen Bewertung.

Arktis-Eis

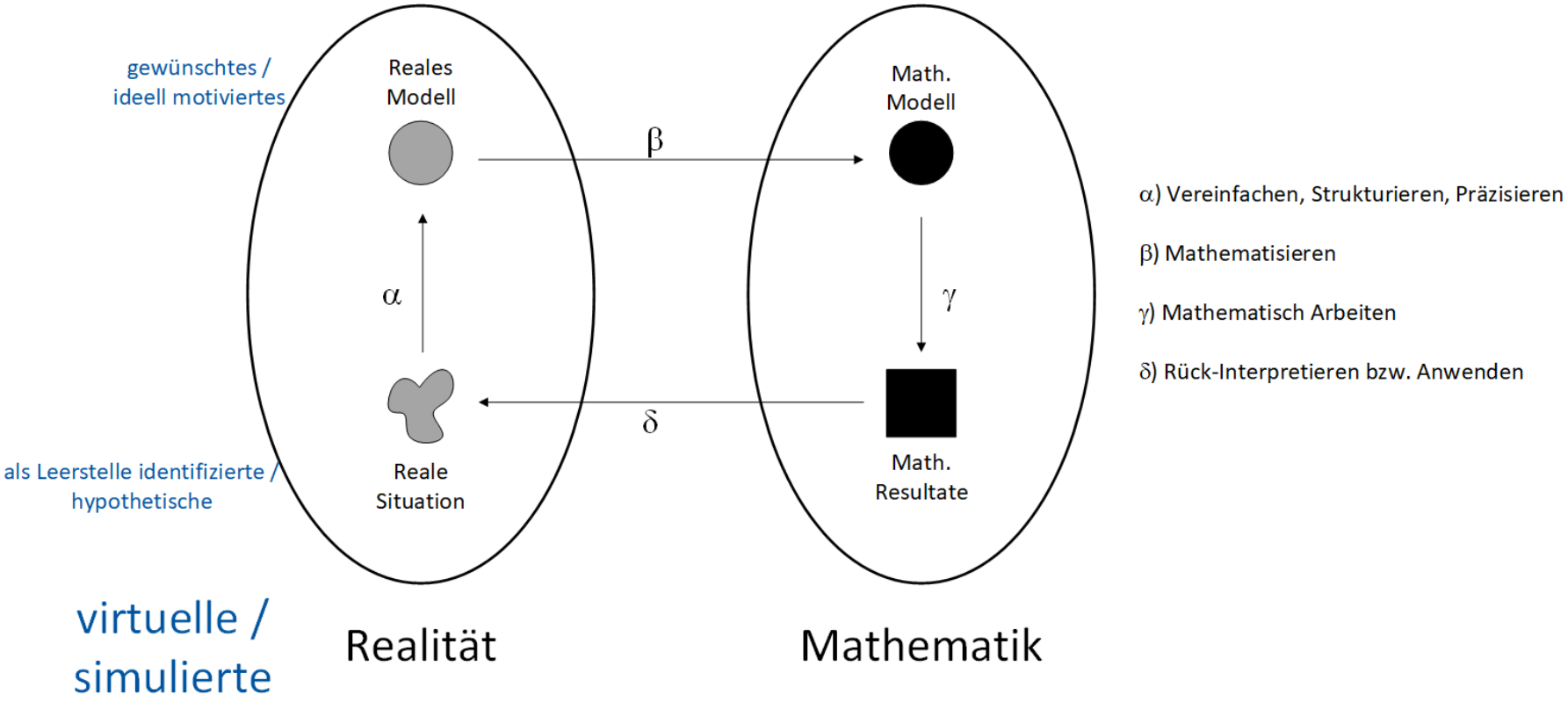

Fläche Meereis in der Arktis / Mio. qkm
JAHRESWERTE
Maximum
arith. Mittel
Minimum
Regressionsgerade
Standardabweichung
y = -0.00475x + 22.6479
y = -0.02376x + 56.79343
y = -0.04821x + 100.5667
Jahr
Credit: Sea Ice Index, National Snow and Ice Data Center

Die Schüler:innen

- diskutieren die idealisierte – nicht in Reinform auftretende – Unterscheidung zwischen deskriptiver und normativer Modellierung und übertragen jeweils charakteristische Aspekte auf authentische Modellierungen.

Und der Modellierungskreislauf?

nach Blum 1985



RÉSUMÉ

- Fernziel:
  Unterscheidung deskriptiver vs. normativer Elemente in einer Modellierung
- Zweischritt:
  Thematisierung normativer Modellierung und dann Differenzierung
- Bildungspotenzial:
  normative Modellierungen nicht mehr als deskriptiv wahrnehmen, bei deskriptiven stärker normative Aspekte reflektieren

Ausblick

- Vertiefung bestehender Modellierungskompetenzen:
  Validieren, Modellbewertung
- Ergänzung des Mathematikbilds:
  Gestaltungspotenzial statt Reduktion auf Abbildungsfunktion
- Staatsbürgerliche Aufklärung:
  kritische Grundhaltung, Veränderbarkeit von Modellen

„Mathemacy can be used for the purpose of empowerment, because it can be a means to organize and reorganize interpretations of social institutions, traditions and proposals for political reforms.“

(Skovsmose 1994, S. 52)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

stefan.pohlkamp@matha.rwth-aachen.de

Materialien:

`https://rwth-aachen.sciebo.de/s/gKzuWMjvRkS3ltW`

Veranstaltungshinweis:
25. & 26.11.2021: Aachener Didaktiktag „Mündigkeit und Haltung"
Workshop (online): Gerechtigkeit und Mathematik – Beitrag zu einer fundierten Meinungsbildung am Beispiel des Teilens (mit M. Ansteeg)

Literatur I

Bildungsministerium Mecklenburg-Vorpommern (Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern) (Hrsg.) (2015): *Rahmenplan für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe. Mathematik*, https://www.bildung-mv.de/downloads/unterricht/rahmenplaene_allgemeinbildende_schulen/Mathematik/Rahmenplan_2015_MV_Mathematik_Sek_II.pdf (Aufruf am 07.05.2019).

Bildungssenatorin Bremen (Senatorin für Bildung und Wissenschaft – Freie Hansestand Bremen) (Hrsg.) (2008): *Mathematik. Bildungsplan für die Gymnasiale Oberstufe - Qualifikationsphase -*, Bremen, https://www.lis.bremen.de/sixcms/media.php/13/MAT_GyQ_2008.pdf (Aufruf am 07.05.2019).

Literatur II

Blum, Werner (1985): „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion“, in: *Mathematische Semesterberichte* 32 (2), S. 195–232.

Bracke, Martin / Vorhölter, Katrin (2018): „Die Flüchtlingsdebatte und der Königsteiner Schlüssel. Erfahrungen aus Modellierungsprojekten“, in: *Mathematik lehren* 207, S. 38–42.

Bruder, Regina et al. (Hrsg.) (2017): *LEMAMOP. Schülermaterial Modellieren*, Braunschweig: Westermann.

Büchter, Andreas / Müller, Jan Hendrik (2006): „Wer gewinnt beim Murmelspiel? Lage-Kennwerte (als normative Modelle) entwickeln“, in: *Mathematik lehren* 138, S. 12–16.

Literatur III

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (Hrsg.) (2019): *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*, https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 (Aufruf am 09.02.21).

Der Bundeswahlleiter (Hrsg.) (2019): *Europawahl 2019. Heft 3: Endgültige Ergebnisse nach kreisfreien Städten und Landkreisen*, Wiesbaden, https://www.bundeswahlleiter.de/dam/jcr/5f3be4ff-f16e-4852-938d-9a038adc29cb/ew19_heft3.pdf (Aufruf am 28.08.2019).

Derman, Emanuel / Wilmott, Paul (2009): „The Financial Modelers' Manifesto", in: https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1324878 (Aufruf am 19.11.2019).

Literatur IV

Marxer, Michael / Prediger, Susanne / Schnell, Susanne (2010): „Wie verteilen wir Müllgebühren? Bildungswirksame Erfahrungen beim Entwickeln und Diskutieren normativer Modellierungen“, in: *Praxis der Mathematik in der Schule* 36, S. 19–25.

Marxer, Michael / Wittmann, Gerald (2009): „Normative Modellierungen. Mit Mathematik Realität(en) gestalten“, in: *Mathematik lehren* 153, S. 10–15.

Pohlkamp, Stefan / Heitzer, Johanna (2020): „Sitzverteilungsverfahren als Beispiel normativer Modellierung par excellence“, in: *MNU Journal* 73 (3), S. 217–221.

Literatur V

Schulministerium NRW (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen) (Hrsg.) (2007): *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*, Frechen: Ritterbach, https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/46/gym8_mathematik.pdf (Aufruf am 11.04.2019).

– (Hrsg.) (2019): *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*, Düsseldorf: https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/195/g9_m_klp_3401_2019_06_23.pdf (Aufruf am 10.12.2020).

Sjuts, Johann (2009): „Mit Mathematik Wirklichkeit schaffen“, in: Leuders, Timo / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Mathemagische Momente*, Berlin: Cornelsen, S. 190–197.

Literatur VI

Skovsmose, Ole (1994): „Towards a critical mathematics education“, in: *Educational Studies in Mathematics* 27 (1), S. 35–57.

Winter, Heinrich (1989): „Lernen für das Leben? Die Lebensversicherung“, in: *Der Mathematikunterricht* 35 (6), S. 46–66.